Universidad de Granada

Departamento de Matemática Aplicada

Modelos Matemáticos II

Grado en Matemáticas y Doble grado en Informática y Matemáticas

Convocatoria extraordinaria

27 de junio de 2019

Apellidos: Firma:

Nombre: D.N.I. o pasaporte:

Duración: **3 horas.** **Grupo (marca el que corresponda):** $3^o A$ ☐, $3^o B$ ☐, 4^o ☐

Ejercicio 1. Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1.a) Todas las funciones en $H^1(0,1)$ están en $\mathcal{C}^1(0,1)$.

1.b) Si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función impar y $h \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, entonces su transformada de Fourier es una función real.

1.c) La función $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $p(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)(x+1)}{|x-1|} & si \quad x \neq 1, \\ 0 & si \quad x = 1, \end{cases}$ no tiene derivada débil.

1.d) Si dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y 2π-periódicas coinciden sobre el intervalo $[0, \pi]$ y además

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx = \int_0^{2\pi} g(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

entonces $f = g$.

SOLUCIÓN: 1.a) FALSA. Basta considerar una función con pico (por ejemplo, $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$), pues estos son derivables débilmente pero no lo son en el sentido clásico.

1.b) FALSA. Se tiene

$$\hat{h}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-2\pi ixy}\,dx = -i\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,\mathrm{sen}(2\pi xy)\,dx \in \mathbb{C}\,,$$

pues $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\cos(2\pi xy)\,dx = 0$ por ser h impar.

1.c) VERDADERA. Los saltos no son derivables débilmente (la derivada de un salto es una delta de Dirac, que no pertenece a $L^1_{loc}(\mathbb{R})$), y la función del enunciado tiene un salto en $x = 1$.

1.d) VERDADERA. Los desarrollos de Fourier de f y g en el intervalo $[0, 2\pi]$ son de la forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right), \quad g(x) = \frac{\widetilde{a_0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\widetilde{a_n}\cos(nx) + \widetilde{b_n}\sin(nx)\right).$$

La condición del enunciado implica que $b_n = \widetilde{b_n}$, por lo que

$$f(x) - g(x) = \frac{a_0 - \widetilde{a_0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \widetilde{a_n}\right)\cos(nx)$$

es una función par que se anula en $[0, \pi]$ (por hipótesis), y por tanto también en $[-\pi, \pi]$. Finalmente, como $f - g$ es 2π-periódica (nuevamente por hipótesis), ha de satisfacerse $f - g = 0$ en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2. Dado el dominio $\Omega := (0,1)\times(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$, y un número $k \in (0,\pi/2)$, consideramos el funcional $\mathcal{F}\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\mathcal{F}[u] := \int_\Omega \Big(|\nabla u(x,y)|^2 + \frac{\partial_x u(x,y) u(x,y)\,\mathrm{sen}(y)}{2} + u(x,y)\cos(kx)\cos(y) \Big)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

2.a) Sabiendo que $\displaystyle\int_0^1 y(x)^2\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 y'(x)^2\,\mathrm{d}x$, para toda función $y \in C_0^1([0,1])$, demuestra que existe $C>0$ tal que

$$\int_0^1\int_0^1 u(x,y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le C\int_0^1\int_0^1 |\nabla u(x,y)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

para toda $u \in H_0^1(\Omega)$.

2.b) Encuentra todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los que $\mathcal{F}$ alcanza un mínimo en $H_0^1(\Omega)$, y justifica que es único.

SOLUCIÓN: 2.a) Podemos hacer la prueba en $C_0^1(\Omega)$ y usar después que este espacio es denso en $H_0^1(\Omega)$ para concluir el argumento. Se tiene

$$\int_0^1\int_0^1 u(x,y)^2\,dx\,dy \le \frac{1}{\pi^2}\int_0^1\int_0^1 \big(\partial_x u(x,y)\big)^2\,dx\,dy \le \frac{1}{\pi^2}\int_0^1\int_0^1 |\nabla u(x,y)|^2\,dx\,dy\,.$$

2.b) En primer lugar podemos observar que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega \partial_x u(x,y)u(x,y)\,\mathrm{sen}(y)\,dx\,dy &= \frac{1}{4}\int_0^1\Big(\int_0^1 \partial_x(u^2)(x,y)\,dx\Big)\mathrm{sen}(y)\,dy\\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 \big(u^2(1,y)-u^2(0,y)\big)\,\mathrm{sen}(y)\,dy = 0\,,\end{aligned}$$

dado que $u \in H_0^1(\Omega)$. Así pues, el funcional $\mathcal{F}[u]$ se reduce a la siguiente expresión:

$$\mathcal{F}[u] := \int_\Omega \Big(|\nabla u(x,y)|^2 + u(x,y)\cos(kx)\cos(y)\Big)\,dx\,dy\,.$$

Consideramos el funcional $a : H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$a(u,v) = 2\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx\,dy\,,$$

que es claramente bilineal y simétrico. Su continuidad se sigue de la acotación

$$|a(u,v)| \le 2\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \le 2\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}\,,$$

en tanto que la coercividad se desprende de la siguiente estimación:

$$a(u,u) = 2\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\,dy \ge \frac{2}{C+1}\|u\|^2_{H^1(\Omega)}\,,$$

toda vez que $\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \le (C+1)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$ en virtud de la desigualdad de Poincaré probada en 2.a). Por otra parte, consideramos

$$F(v) := -\int_\Omega v(x,y)\cos(kx)\cos(y)\,dx\,dy\,,$$

que satisface $|F(v)| \le \|v\|_{L^2(\Omega)}$, luego es lineal y continua en $H_0^1(\Omega)$. Finalmente, el teorema de Lax-Milgram asegura la existencia de una única solución del problema consistente en minimizar en $H_0^1(\Omega)$ el funcional $\frac{1}{2}a(v,v) - F(v)$, que es exactamente $\mathcal{F}[v]$.

Ejercicio 3. Considera el siguiente problema variacional:

$$\text{minimizar } \mathcal{F}[y] := \int_0^{4\pi} \Big(\frac{y'(x)^2 + 7\,y(x)^2}{2}\Big) dx \text{ en el conjunto } \mathcal{D} = \Big\{ y \in C_0^1(0,4\pi) : \int_0^{4\pi} y^2(x) dx = \frac{1}{2} \Big\}.$$

Justifica que tiene solución, calcula todas las extremales y determina el mínimo m y la(s) función(es) sobre la(s) que lo alcanza.[1]

SOLUCIÓN: Denotemos $F(y,p) := \frac{1}{2}(p^2 + 7y^2)$ y $F^*(y,p) := F(y,p) - \lambda y^2$. La ecuación de Euler-Lagrange asociada a nuestro problema es

$$0 = F_y^* - \frac{d}{dx}(F_p^*) = (7 - 2\lambda)y - y'' \,, \tag{1}$$

que habrá que resolver junto con las condiciones de contorno $y(0) = y(4\pi) = 0$ para encontrar las extremales. Los valores propios de este problema hay que buscarlos entre aquellos valores del parámetro que cumplen $\lambda > \frac{7}{2}$, para los cuales la solución general de la ecuación (1) viene dada por

$$y(x) = A \cos\big(\sqrt{2\lambda - 7}\, x\big) + B \operatorname{sen}\big(\sqrt{2\lambda - 7}\, x\big) \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Al aplicar las condiciones de contorno obtenemos

$$A = 0\,, \quad B \operatorname{sen}\big(4\sqrt{2\lambda - 7}\,\pi\big) = 0\,,$$

que solo genera soluciones no triviales cuando $\operatorname{sen}\big(4\sqrt{2\lambda - 7}\,\pi\big) = 0$ o, equivalentemente, si $\lambda_n = \frac{112+n^2}{32}$ para $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, las funciones propias son de la forma $y_n(x) = B \operatorname{sen}(nx)$. Para que se satisfaga la ligadura se ha de cumplir

$$1 = B^2 \int_0^{4\pi} \operatorname{sen}(nx)^2\, dx = B^2 \int_0^{4\pi} \frac{1 - \cos(2x)}{2}\, dx = 2\pi B^2\,,$$

luego

$$y_n(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sen}(nx)\,.$$

Utilizando un resultado estudiado en clase, el mínimo de $\mathcal{F}$ es $\lambda_1 = \frac{113}{32}$ y se alcanza en $y_1(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sen}(x)$.

Ejercicio 4. Consideramos el sistema de reacciones químicas siguientes:

$$X + 2Z \xrightarrow{k_1} Y \xrightarrow{k_2} W + X$$

donde $k_1, k_2 > 0$, y denotamos $x(t) = [X]$ e $y(t) = [Y]$ a las concentraciones respectivas de las sustancias químicas X e Y, y suponemos que $z = [Z]$ y $w = [W]$ son constantes para todo $t \geq 0$. Calcula todos los estados de equilibrio del proceso y, si las concentraciones iniciales de $[X]$ e $[Y]$ son $[X]_0 = 1$ e $[Y]_0 = 2$, determina a cuál de ellos puede converger.

SOLUCIÓN: Como las concentraciones de Z y W son constantes a lo largo del tiempo ($[Z](t) = z$, $[W](t) = w$ para todo $t \geq 0$) nos limitaremos a escribir las ecuaciones diferenciales satisfechas por $[X]$ e $[Y]$:

$$\frac{d[X]}{dt} = k_2[Y] - k_1 z^2 [X]\,,$$
$$\frac{d[Y]}{dt} = k_1 z^2 [X] - k_2 [Y]\,.$$

Es claro que $[X] + [Y]$ es una cantidad conservada, luego $[X](t) + [Y](t) = [X]_0 + [Y]_0 = 3$. Por otra parte, los estados de equilibrio son las soluciones de la siguiente ecuación:

$$k_2[Y] - k_1 z^2 [X] = 0\,,$$

es decir, todos los pares de la forma $(x, \frac{k_1 z^2}{k_2} x)$. Como para el dato inicial dado se tiene que $[Y](t) = 3 - [X](t)$, el único estado de equilibrio al que puede converger nuestro sistema es

$$[X] = \frac{3k_2}{k_2 + k_1 z^2}\,, \quad [Y] = 3 - [X] = \frac{3k_1 z^2}{k_2 + k_1 z^2}\,.$$

[1] Por si te resultase de utilidad: $\operatorname{sen}(x)^2 = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.