Universidad de Granada Departamento de Matemática Aplicada	**Modelos Matemáticos II** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas	**Examen final y soluciones** 15 de junio 2021

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. o pasaporte:

La duración del examen es de tres horas.

Ejercicio 1 (3 puntos)**.** Se considera el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(x-2)^2 y'(x)^2 + y(x)y'(x) - (x-2)y(x) \right) \mathrm{d}x$$

definido en el dominio

$$\mathcal{D} = \left\{ y \in C^2[0,1] \,:\, y(0) = y(1) = 1 \right\}.$$

Se pide:

(i) Encuentra las ecuaciones de Euler-Lagrange que deben cumplir los extremales de este funcional.

(ii) Encuentra todos los extremales de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$.

(iii) Demuestra que el funcional es convexo. ¿Alcanza $\mathcal{F}$ mínimo en $\mathcal{D}$? En caso afirmativo, ¿dónde lo alcanza? Justifica la respuesta.

Solución 1. (i) Definimos

$$F(x,y,p) := \frac{1}{2}(x-2)^2 p^2 + yp - (x-2)y\,.$$

La ecuación de Euler-Lagrange viene dada por

$$0 = F_y - \frac{d}{dx}(F_p) = p - (x-2) - \frac{d}{dx}\big((x-2)^2 p + y\big) = -(x-2) - 2(x-2)y' - (x-2)^2 y''\,.$$

(ii) La ecuación recién obtenido es de tipo Euler. Haciendo el cambio de variables

$$x - 2 = e^z\,, \quad u(z) = y(x)\,,$$

se obtiene

$$y'(x) = u'(z)\frac{dz}{dx} = \frac{u'(z)}{x-2} = u'(z)e^{-z}\,,$$
$$y''(x) = \big(u'(z)e^{-z}\big)'\frac{dz}{dx} = \big(u''(z) - u'(z)\big)e^{-2z}\,,$$

de donde llegamos a

$$u'' + u' = -e^z\,.$$

Integrando con respecto a la variable z se deduce que ha de cumplirse

$$u' + u = A - e^z\,, \quad A \in \mathbb{R}\,.$$

La solución general de la ecuación homogénea asociada es $u_h(z) = Ke^{-z}$, con $K \in \mathbb{R}$. Empleando ahora el método de variación de las constantes se considera $u(z) = K(z)e^{-z}$ para obtener

$$K'(z)e^{-z} = A - e^z \Rightarrow K(z) = Ae^z - \frac{1}{2}e^{2z} + B\,, \quad B \in \mathbb{R}\,.$$

En consecuencia

$$u(z) = A + Be^{-z} - \frac{1}{2}e^z\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Deshaciendo ahora el cambio de variables se llega a

$$y(x) = A + \frac{B}{x-2} - \frac{1}{2}(x-2)\,.$$

Imponemos finalmente las condiciones de contorno $y(0) = y(1) = 1$, de lo que resulta

$$A - \frac{B}{2} + 1 = 1\,, \quad A - B + \frac{1}{2} = 1\,.$$

Por consiguiente $A = -\frac{1}{2}$, $B = -1$, y la única extremal asociada al problema de minimización propuesto viene dada por $y_e(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x-2} - \frac{x}{2}$.

(iii) Se tiene

$$\text{Hess}[F] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & (x-2)^2 \end{pmatrix}\,,$$

que no es definido positivo. Sin embargo, podemos observar que el funcional puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[y] &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(x-2)^2 y'(x)^2 + y(x)y'(x) - (x-2)y(x)\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(x-2)^2 y'(x)^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(y^2(x)\right) - (x-2)y(x)\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(x-2)^2 y'(x)^2 - (x-2)y(x)\right) dx + \frac{1}{2}\left(y^2(1) - y^2(0)\right) \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(x-2)^2 y'(x)^2 - (x-2)y(x)\right) dx\,, \end{aligned}$$

que es convexo en $[0,1]$. Además, para $y_1, y_2 \in \mathcal{D}$ basta tomar una combinación convexa $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$ y observar que pertenece a $C^2[0,1]$ y satisface las condiciones de contorno cualquiera que sea $\lambda \in (0,1)$ para concluir que $\mathcal{D}$ es convexo. Por tanto, la extremal obtenida en el apartado anterior es el único mínimo en $\mathcal{D}$ de este problema, de acuerdo con los resultados teóricos vistos en clase.

Ejercicio 2 (4 puntos)**.** Sea $B \subseteq \mathbb{R}^2$ la bola abierta de radio 1, y $\lambda \in \mathbb{R}$ un número. Consideramos la ecuación

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u(x) + \lambda u(x) = |x|^{-1/2}, && x \in B \\ &u = 0 && \text{en } \partial B. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

1. Define el concepto de solución débil para esta ecuación.

2. Demuestra que si $|\lambda|$ es suficientemente pequeño esta ecuación tiene una única solución débil.

3. Dado $1 < k < 2$, calcula el laplaciano (clásico) en $B \setminus \{0\}$ de la función $w\colon B \to \mathbb{R}$ definida por $w(x) := |x|^k - 1$, y demuestra que $\Delta w \in L^2(B)$.

4. Supón que la función w del apartado anterior está en $H_0^2(B)$ (es así para todo $k > 1$). Encuentra explícitamente la solución débil del problema (1) con $\lambda = 0$, y demuestra que lo es. ¿Es esta solución también una solución clásica?

Solución 2. 1. Sea $v \in H_0^1(B)$. Multiplicando la ecuación por v resulta

$$\int_B \left(\Delta u(x) + \lambda u(x)\right) v(x)\, dx = \int_B |x|^{-1/2} v(x)\, dx\,.$$

Integrando ahora por partes se obtiene

$$\int_B \Big(-\nabla u(x)\cdot\nabla v(x) + \lambda u(x)v(x)\Big)dx = \int_B |x|^{-1/2} v(x)\,dx\,.$$

La elección del espacio $H_0^1(B)$ se fundamenta tanto por la condición de contorno como por el hecho de que todos los términos implicados en la anterior igualdad tienen sentido si u, $v\in L^2(B)$ y ∇u, $\nabla v\in L^2(B)$. Además, $|x|^{-1/2}\in L^2(B)$ ya que, usando coordenadas polares, se tiene

$$\int_B \Big(|x|^{-1/2}\Big)^2\,dx = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,r^{-1}dr\,d\theta = 2\pi\,.$$

Por tanto, diremos que una función $u\in H_0^1(B)$ es solución débil de (1) si cumple

$$\int_B \nabla u\cdot\nabla v\,dx - \lambda\int_B uv\,dx = -\int_B |x|^{-1/2}v\,dx \qquad \text{para toda } v\in H_0^1(B). \tag{2}$$

2. Definimos, para $u,v\in H_0^1(B)$,

$$a(u,v) := \int_B \nabla u\cdot\nabla v\,dx - \lambda\int_B uv\,dx\,,\quad F(v) := -\int_B |x|^{-1/2}v\,dx\,.$$

Podemos aplicar el teorema de Lax-Milgram para la forma bilineal $a: H_0^1(B)\times H_0^1(B)\to\mathbb{R}$ y la forma lineal $F: H_0^1(B)\to\mathbb{R}$ para ver que existe una única solución débil. La linealidad y continuidad de a y F es estándar y se ha estudiado en clase en repetidas ocasiones. Para ver que a es coerciva cuando $|\lambda|$ es pequeño usamos la desigualdad de Poincaré en B, con constante $\sqrt{C_B}$:

$$\int_B |v(x)|^2\,dx \le C_B\int_B |\nabla v(x)|^2\,dx\,.$$

Entonces se tiene

$$\begin{aligned} a(v,v) = \int_B |\nabla v|^2\,dx &- \lambda\int_B v^2\,dx \ge \int_B |\nabla v|^2\,dx - |\lambda|\int_B v^2\,dx \\ &\ge \int_B |\nabla v|^2\,dx - |\lambda| C_B\int_B |\nabla v|^2\,dx = (1-|\lambda|C_B)\int_B |\nabla v|^2\,dx\,. \end{aligned}$$

Por tanto, a es coerciva si $|\lambda|C_B<1$ (de hecho, también lo es para todo $\lambda<0$), y para estos valores de λ el teorema de Lax-Milgram asegura que (1) tiene una única solución débil en $H_0^1(B)$.

3. Tenemos

$$\partial_{x_i} w = k|x|^{k-2}x_i\,,\quad \partial_{x_i}^2 w = k|x|^{k-2} + k(k-2)x_i^2|x|^{k-4}\,,$$

luego

$$\Delta w = 2k|x|^{k-2} + k(k-2)|x|^{k-2} = k^2|x|^{k-2}.$$

Esta función está en $L^2(B)$ ya que $\big(\Delta w\big)^2 = k^4|x|^{2(k-2)}$ es integrable en B:

$$k^4\int_B |x|^{2(k-2)}\,dx = k^4\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,r^{2(k-2)}\,dr\,d\theta = \frac{2\pi k^4}{2k-2}\Big[r^{2k-2}\Big]_0^1 = \frac{2\pi k^4}{2k-2},\quad \text{si } k>1.$$

4. Si en el apartado anterior elegimos $k=3/2$ vemos que

$$\Delta w = \frac{9}{4}|x|^{-1/2}\,,$$

así que elegimos

$$u(x) := \frac{4}{9}(|x|^{3/2}-1)\,, \tag{3}$$

de forma que $\Delta u = |x|^{-1/2}$ en sentido clásico para $x \neq 0$. La función u definida en (3) está en $H_0^2(B)$ como nos indica el ejercicio (y el apartado anterior), así que debe ocurrir que $\Delta u = |x|^{-1/2}$ también en sentido débil. Por la definición de derivada débil tenemos que, para todo $v \in C_c^1(B)$,

$$\int_B \nabla v \cdot \nabla u \, dx = -\int_B v \Delta u \, dx = -\int_B v|x|^{-1/2} \, dx \,,$$

que es exactamente (2). Por densidad de $C_c^1(B)$ en $H_0^1(B)$, la igualdad se cumple también para todo $v \in H_0^1(B)$. En consecuencia, (3) es la solución débil del problema. En este caso $u \notin C^2(B)$, de modo que no es una solución clásica.

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** Consideramos las siguientes reacciones entre cuatro especies químicas A, B, X, Y, con constantes de reacción $k_1, k_2, k_3 > 0$:

$$A \xrightarrow{k_1} X, \qquad X + Y \xrightarrow{k_2} 2Y, \qquad Y \xrightarrow{k_3} B.$$

1. Denotamos por a, b, x, y las concentraciones de las especies A, B, X, Y. Usando la ley de acción de masas, escribe las ecuaciones diferenciales ordinarias que describen el comportamiento de las concentraciones x, y de las especies X, Y. (No es necesario que escribas las ecuaciones que cumplen a, b.)

2. Suponiendo que las concentraciones $a > 0$, $b > 0$ son constantes positivas dadas, demuestra que el sistema de ecuaciones diferenciales para x, y tiene un único equilibrio, y encuéntralo. Si queremos que en este equilibrio la concentración de X sea igual a la concentración de Y, ¿qué valor debemos dar a la concentración de A?

3. Siempre suponiendo que a, b son constantes, y tomando condiciones iniciales no negativas $x(0) = x_0 \geq 0$, $y(0) = y_0 \geq 0$, ¿tiene solución definida en $[0, +\infty)$ el sistema de ecuaciones de x, y?

Solución 3. 1. Las ecuaciones que se piden son

$$x' = k_1 a - k_2 xy \,, \qquad y' = k_2 xy - k_3 y \,.$$

2. El equilibrio (x, y) debe cumplir

$$0 = k_1 a - k_2 xy \,, \qquad 0 = k_2 xy - k_3 y = y(k_2 x - k_3) \,.$$

De la segunda ecuación vemos que $x = k_3/k_2$ (ya que $y \neq 0$ en virtud de la primera ecuación). Despejando de la primera ecuación tenemos que $y = k_1 a/(k_2 x) = k_1 a/k_3$.

Si además queremos que $x = y$ debe ocurrir

$$k_3/k_2 = k_1 a/k_3, \qquad \text{es decir,} \qquad a = k_3^2/(k_1 k_2) \,.$$

3. El sistema siempre tiene solución maximal definida localmente en tiempo gracias al teorema de Picard-Lindelöf, ya que los segundos miembros son funciones polinómicas y, por tanto, de clase C^∞ (y, en particular, localmente lipschitzianas). Para ver que tiene solución definida en $[0, +\infty)$ es suficiente ver que los valores de x, y no pueden converger a $\pm\infty$ en tiempo finito. Podemos suponer que $x, y \geq 0$.[1] Entonces

$$x' \leq k_1 a \,,$$

luego $x(t) \leq x_0 + k_1 at$. Por tanto

$$y' \leq k_2 xy \leq k_2(x_0 + k_1 at)y \,,$$

de donde se desprende que

$$y(t) \leq y_0 \, e^{k_2(x_0 + k_1 at)t} \,,$$

luego y no puede converger a $+\infty$ en tiempo finito.

[1] El sistema conserva la positividad porque si $x = 0$ e $y \geq 0$, entonces $x' \geq 0$; y lo mismo sucede con y: si $y = 0$ y $x \geq 0$, entonces $y' \geq 0$.