UNIVERSIDAD DE GRANADA
Modelos Matemáticos II. 5 de junio de 2019

EJERCICIO 1. Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. La transformada de Fourier de la función
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$
es una función no negativa. (Nota: aunque f no esté en la clase de Schwartz, su transformada de Fourier está bien definida).

2. Todas las funciones en $C^1[0,1]$ están en $H^1(0,1)$.

3. Si una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua y lineal a trozos, verifica
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x)dx = \int_0^1 \phi(x)dx$$
para cualquier función test $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, entonces $f \in H^1(\mathbb{R})$.

4. Si una enzima libre E reacciona con un sustrato S tal que forma un complejo enzima-sustrato SE para producir una proteína nueva P, $S + E \underset{k_+}{\overset{k_-}{\rightleftharpoons}} SE \xrightarrow{k_2} P + E$, entonces la cantidad total de enzima (esto es, enzima libre y enzima en forma de complejo) se conserva.

SOLUCIÓN: 1. FALSA. Se tiene
$$\begin{aligned} \hat{f}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x y}\, dx = \int_{-1}^{1} x \left(\cos(2\pi x y) - i \operatorname{sen}(2\pi x y) \right) dx \\ &= -2i \int_0^1 x \operatorname{sen}(2\pi x y)\, dx = \frac{i}{\pi} \frac{d}{dy} \int_0^1 \cos(2\pi x y)\, dx = \frac{i}{2\pi^2} \frac{d}{dy} \Big(\frac{\operatorname{sen}(2\pi y)}{y} \Big) \\ &= \frac{i}{2\pi y} \Big(\cos(2\pi y) - \frac{\operatorname{sen}(2\pi y)}{2\pi y} \Big), \end{aligned}$$
que es una función compleja. Adviértase que hemos usado que $\int_{-1}^1 x \cos(2\pi x y)\, dx = 0$ (por simetría) y $\int_{-1}^1 x \operatorname{sen}(2\pi x y)\, dx = 2 \int_0^1 x \operatorname{sen}(2\pi x y)\, dx$ (por paridad).

2. VERDADERA, pues toda función continua en $[0,1]$ es de cuadrado integrable. En efecto, dada $f \in C([0,1])$ se tiene
$$\int_0^1 |f(x)|^2\, dx \leq \Big(\max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| \Big)^2.$$
Se argumenta análogamente con f'.

3. FALSA. Como f es continua, en particular es localmente integrable. Por tanto, la relación integral que nos da el enunciado puede interpretarse de la siguiente manera: f admite derivada débil de primer orden, la cual viene dada por la siguiente función (localmente integrable):
$$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} . \tag{1}$$

Es claro que $f' \in L^2(\mathbb{R})$, puesto que $\|f'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = 1$. Para pertenecer a $H^1(\mathbb{R})$, a f le faltaría ser de cuadrado integrable. Sin embargo, las únicas funciones que cumplen (1) y las condiciones del enunciado son las de la forma

$$f_A(x) = \begin{cases} A, & \text{si } x \leq 0 \\ A - x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ A - 1, & \text{si } x > 1 \end{cases},$$

que no pertenecen a $L^2(\mathbb{R})$.

4. VERDADERA. Denotando $[E]$ y $[SE]$ las concentraciones de enzima y de complejo enzima-sustrato, respectivamente, se tiene:

$$\frac{d[E]}{dt} = (k_+ + k_2)[SE] - k_-[S][E]\,, \qquad \frac{d[SE]}{dt} = k_-[S][E] - (k_+ + k_2)[SE]\,,$$

luego $\frac{d}{dt}([E] + [SE]) = 0$ y, por tanto, la cantidad total de enzima en el proceso, $[E] + [SE]$, se conserva.

EJERCICIO 2. Consideramos la siguiente ecuación del calor, planteada en un dominio abierto y acotado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, con incógnita $u = u(t,x)$ ($t \geq 0$, $x \in \overline{\Omega}$) y condición inicial $u_0 \in C^2(\overline{\Omega})$:

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u - 2u, & t > 0,\ x \in \Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0, & t > 0,\ x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

1. Dada una solución u de (2), consideramos la energía

$$E(t) := \int_\Omega |u(t,x)|^2\,dx.$$

   Demuestra que $E(t) \leq E(s)$ para todo $0 \leq s \leq t$.

2. Como consecuencia del apartado 1, demuestra que la solución (clásica) de (2) es única.

3. En el caso $\Omega = (0,1) \subseteq \mathbb{R}$ y $u_0(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$, calcula explícitamente la solución u. (Sugerencia: usa separación de variables.)

SOLUCIÓN: 1. Multiplicando la ecuación de (2) por u e integrando por partes se obtiene

$$\int_\Omega u u_t\,dx = \int_\Omega u\Delta u\,dx - 2\int_\Omega |u|^2\,dx = -\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - 2\int_\Omega |u|^2\,dx \leq 0\,,$$

dado que u se anula sobre la frontera de Ω (véase la última condición del problema (2)). Basta entonces con tener en cuenta que

$$\int_\Omega u u_t\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2\,dx = \frac{1}{2}E'(t)$$

para concluir que $E(t)$ es una función decreciente.

2. Supongamos que hubiese dos soluciones u_1 y u_2. En tal caso la función $v := u_1 - u_2$ resolvería el siguiente problema:

$$\begin{cases} \partial_t v = \Delta v - 2v, & t > 0,\ x \in \Omega, \\ v(0,x) = 0, & x \in \Omega, \\ v(t,x) = 0, & t > 0,\ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

La energía asociada a v, dada por $E(t) = \int_\Omega |v(t,x)|^2\,dx$, es una función no negativa y decreciente (como se probó en el apartado anterior) que se anula en $t = 0$, luego ha de ser $E \equiv 0$. Por consiguiente, $u_1 = u_2$.

3. Consideramos una solución de la forma $u(t,x) = T(t)w(x)$. Entonces $T'(t)w(x) = T(t)w''(x) - 2T(t)w(x)$ o, equivalentemente:

$$\frac{T'(t)+2T(t)}{T(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} = -\lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Para encontrar w debemos resolver la ecuación diferencial $w'' + \lambda w = 0$ sujeta a las condiciones de contorno $w(0) = w(1) = 0$, cuyas soluciones no triviales son de la forma $w(x) = K \operatorname{sen}(n\pi x)$ siempre que $\lambda_n = (n\pi)^2$, $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, la ecuación que ha de resover T es $T' + (2 + n^2\pi^2)T = 0$, que tiene como soluciones $T(t) = Ce^{-(2+n^2\pi^2)t}$. Como ha de ser $u(0,x) = \operatorname{sen}(\pi x)$, basta con tomar $C = K = n = 1$, de donde resulta

$$u(t,x) = e^{-(2+\pi^2)t} \operatorname{sen}(\pi x)\,.$$

EJERCICIO 3. Se considera el problema consistente en encontrar $u \in H_0^1(0,1)$ tal que

$$\int_0^1 \big[4u'(x)v'(x) - kv'(x)u(x) - kv(x)u'(x) - u(x)v(x)\big]\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx,$$

para todo $v \in H_0^1(0,1)$ y $f \in L^2(0,1)$, donde $k \in \mathbb{R}$ es un parámetro a determinar.

1. Demuestra[1] la siguiente desigualdad de Poincaré para $u \in H_0^1(0,1)$:

$$\|u\|_{L^2(0,1)} \leq \|u'\|_{L^2(0,1)}\,.$$

   Demuestra que la norma usual en H^1 es equivalente a la norma

$$|||u|||_{H^1(0,1)} = \|u'\|_{L^2(0,1)}, \quad \text{si} \quad u \in H_0^1(0,1).$$

2. Determina una condición suficiente sobre el parámetro k que permita afirmar que el problema anterior tiene una única solución.

3. Por la regularidad de este tipo de problemas sabemos que, caso de existir, la solución $u \in H^2(0,1)$. ¿Qué ecuación de Euler-Lagrange satisface la posible solución del problema de minimización asociado? ¿Es alguna de las soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange un mínimo de dicho problema?

SOLUCIÓN: 1. Véase la solución a la Prueba 1.

2. Consideramos los funcionales

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_0^1 \big[4u'(x)v'(x) - kv'(x)u(x) - kv(x)u'(x) - u(x)v(x)\big]\,dx \\ &= \int_0^1 \big[4u'(x)v'(x) - k(u(x)v(x))' - u(x)v(x)\big]\,dx = \int_0^1 \big[4u'(x)v'(x) - u(x)v(x)\big]\,dx \end{aligned}$$

y $F(v) = -\int_0^1 f(x)v(x)\,dx$. El funcional a es obviamente bilineal. La continuidad de a resulta de la siguiente estimación:

$$|a(u,v)| \leq 4\|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq 5\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}\,,$$

en tanto que la de F se sigue de $|F(v)| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1}$. Estudiemos finalmente la coercividad de a:

$$a(u,u) = \int_0^1 \big[4u'(x)^2 - u(x)^2\big]\,dx \geq 3\int_0^1 u'(x)^2\,dx = 3|||u|||^2_{H^1}\,.$$

[1]Recuerda que $C_0^1(0,1)$ es denso en $H_0^1(0,1)$.

Por tanto a es coerciva para todo $k \in \mathbb{R}$, y del teorema de Lax-Milgram se deduce la existencia de una única solución para el problema planteado.

3. También por el teorema de Lax-Milgram, y dado que el funcional a es claramente simétrico, la única solución del problema planteado coincide con el mínimo del funcional $\mathcal{F}[v] = \frac{1}{2}a(v,v) - F(v)$, luego ha de resolver la siguiente ecuación de Euler-Lagrange:

$$0 = -kv' - v + f - \frac{d}{dx}(4v' - kv) = f - v - 4v'' + 2kv'$$

o, equivalentemente, $4v'' - 2kv' + v = f$.

Alguna de las extremales ha de ser necesariamente un mínimo, pues el teorema de Lax-Milgram garantiza la existencia de solución (única) del problema consistente en minimizar $\mathcal{F}$ en $H_0^1(0,1)$.

EJERCICIO 4. Considera el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^2 [y(x)y'(x)]^n \, dx\,, \quad n \geq 2,$$

definido en $\mathcal{D}_K = \big\{ y \in C^1[0,2],\ y(0) = 1,\ y(2) = K \big\} \cap C^2$.

1. Demuestra que cualquier mínimo de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}_K$ cumple la siguiente ecuación diferencial:

$$y^{(n-1)}(y')^{(n-2)}(y^2)'' = 0\,.$$

2. Estudia la convexidad del funcional $\mathcal{F}$ y del conjunto $\mathcal{D}_K$ según los valores de $K \in \mathbb{R}$.

3. Calcula las extremales de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ y discute cuándo podemos afirmar que son mínimos. (Sugerencia: puede resultarte útil distinguir la paridad de n).

SOLUCIÓN: 1. Definimos $F(y,p) := y^n p^n$. La ecuación de Euler-Lagrange asociada a $\mathcal{F}$ es

$$\begin{aligned} 0 &= F_y - \frac{d}{dx}(F_p) = ny^{n-1}p^n - \frac{d}{dx}(ny^n p^{n-1}) = n(1-n)y^{n-1}p^n - n(n-1)y^n p^{n-2}p' \\ &= n(1-n)y^{n-1}(y')^{n-2}\big((y')^2 + yy''\big) = \frac{n(1-n)}{2}y^{n-1}(y')^{n-2}(y^2)''\,. \end{aligned}$$

2. Se tiene

$$F_{yy} = n(n-1)y^{n-2}p^n\,, \quad F_{pp} = n(n-1)y^n p^{n-2}\,, \quad F_{yp} = n^2 y^{n-1}p^{n-1}\,.$$

Por consiguiente, el determinante de la matriz Hessiana es igual a

$$n^2(n-1)^2 y^{2n-2}p^{2n-2} - n^4 y^{2n-2}p^{2n-2} = n^2(1-2n)y^{2n-2}p^{2n-2} \leq 0\,,$$

luego el funcional no es convexo cualquiera que sea el valor de $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, $\mathcal{D}_K$ es un conjunto convexo cualquiera que sea el valor de K. En efecto, si $y_1, y_2 \in \mathcal{D}_K$ entonces $y = \theta y_1 + (1-\theta)y_2$ satisface

$$y(0) = \theta y_1(0) + (1-\theta)y_2(0) = \theta + 1 - \theta = 1\,, \quad y(2) = \theta y_1(2) + (1-\theta)y_2(2) = K(\theta + 1 - \theta) = K\,,$$

cualquiera que sea $0 \leq \theta \leq 1$.

3. Las soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange son las funciones $y(x) = \sqrt{Ax+B}$, $A, B \in \mathbb{R}$ (familia que obviamente incluye las constantes sin más que tomar $A = 0$). En $\mathcal{D}_1$ las condiciones de contorno son $y(0) = y(2) = 1$, luego la única extremal es $y(x) = 1$; en tanto que en $\mathcal{D}_2$ las condiciones de contorno son $y(0) = 1$, $y(2) = 2$, luego la única extremal es $y(x) = \sqrt{\frac{3}{2}x + 1}$. Aunque el funcional no es convexo, siempre que n sea par se verifica $\mathcal{F} \geq 0$. Consecuentemente, en el caso correspondiente a $\mathcal{D}_1$ resulta $\mathcal{F}[1] = 0$, luego la extremal es un mínimo.