Universidad de Granada	**Prueba final**	MODELOS MATEMÁTICOS II
Dept. Matemática Aplicada	19–Junio–2018	GRADO MATEMÁTICAS Y
Facultad de Ciencias		DOBLE G. CON ING. INFORMÁTICA

Apellidos | Firma

Nombre | D.N.I o pasaporte | 3ºA | 3ºB | 4º

1. $\boxed{\text{4 puntos}}$ JUSTIFICA RAZONADAMENTE la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones

1.a) El funcional $a(u,v) = \int_{\mathbb{R}^2} \Big(3\nabla u \cdot \nabla v + uv - 2\partial_x u \partial_y v - 2\partial_y u \partial_x v\Big) dxdy$ es simétrico y coercivo sobre el espacio $H^1(\mathbb{R}^2)$.

1.b) El siguiente problema de contorno: $y'' - 2y' + \lambda e^x + y = 0$, con $y'(0) = 1$ e $y'(1) = 0$, posee una única solución para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.c) Dadas las reacciones: $2X + Y \rightleftarrows Z$, $\quad Z + Y \rightleftarrows W$, entonces, llamando $x = [X]$, $y = [Y]$, $z = [Z]$ y $w = [W]$, las cantidades $(y + z + 2w)$ y $(x + z + w)$ se conservan.

1.d) La función $u(t,x) = \operatorname{sen}(4x)\cos(2t) + \operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(t/2)$ es una extremal del problema consistente en minimizar el funcional $\mathcal{F}(u) = \int_0^\pi \int_0^\pi \Big(4(\partial_t u)^2 - (\partial_x u)^2\Big) dxdt$, sobre el dominio

$$\mathcal{D} := \left\{ u \in \mathcal{C}^1([0,\pi]^2) \;\middle|\; \begin{array}{lll} u(0,x) = \operatorname{sen}(4x), & u(\pi,x) = \operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}(4x), & \text{para } x \in [0,\pi], \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & & \text{para } t \in [0,\pi] \end{array} \right\}.$$

Solución: (a) VERDADERA. Es obvio que $a(u,v) = a(v,u)$, por lo que el funcional es simétrico. Para verificar la coercividad evaluamos

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_{\mathbb{R}^2} \Big(3|\nabla u|^2 + u^2 - 4\partial_x u \partial_y u\Big) dxdy \geq \int_{\mathbb{R}^2} \Big(3|\nabla u|^2 + u^2 - 2\big((\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2\big)\Big) dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \Big(|\nabla u|^2 + u^2\Big) dxdy = \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

(b) FALSA. La solución general de la ecuación (lineal) homogénea es $y(x) = Ae^x + Bxe^x$, con $A, B \in \mathbb{R}$. Al imponer las condiciones de contorno se obtiene $A = 2$, $B = -1$, luego el problema de contorno homogéneo admite la soluciones no triviales. Por consiguiente, al problema no homogéneo solo le cabe no tener solución o tener infinitas, cualquiera que sea el valor de λ, en virtud del teorema de la alternativa de Fredhölm.

(c) FALSA. Denotemos $\lambda_1^{d/i}$ y $\lambda_2^{d/i}$ las ratios directa (^{d}) e inversa (^{i}) de las reacciones primera y segunda, respectivamente. Según la ley de acción de masas, las ecuaciones del modelo son las siguientes:

$$x' = 2k_1^i z - k_1^d x^2 y, \;\; y' = k_1^i z + k_2^i w - k_1^d x^2 y - k_2^d zy, \;\; z' = k_1^d x^2 y + k_2^i w - k_1^i z - k_2^d zy, \;\; w' = k_2^d zy - k_2^i w.$$

Por consiguiente:

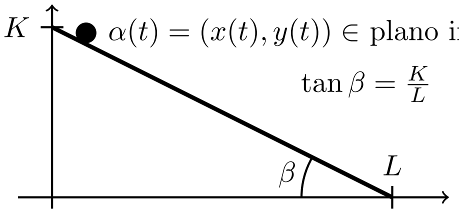
$$(y + z + 2w)' = 0, \quad (x + z + w)' = k_1^i z.$$

(d) FALSA. Si denotamos $p = \partial_x u$, $q = \partial_t u$ y $F(u,p,q) = 4q^2 - p^2$, la ecuación de Euler-Lagrange asociada al problema de minimización es $0 = F_u - \partial_x(F_p) - \partial_t(F_q) = 2u_{xx} - 8u_{tt}$ o, equivalentemente, $u_{tt} = \frac{1}{4}u_{xx}$. Si consideramos la función del enunciado, $u(t,x) = \operatorname{sen}(4x)\cos(2t) + \operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(t/2)$, se tiene:

$$\begin{aligned} u_t &= -2\operatorname{sen}(4x)\operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(3x)\cos(t/2), \quad & u_{tt} &= -4\operatorname{sen}(4x)\cos(2t) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(t/2), \\ u_x &= 4\cos(4x)\cos(2t) + 3\cos(3x)\operatorname{sen}(t/2), \quad & u_{xx} &= -16\operatorname{sen}(4x)\cos(2t) - 9\operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(t/2), \end{aligned}$$

luego u no es una extremal de $\mathcal{F}$.

2. $\boxed{\text{3 puntos}}$ En el siguiente ejercicio estudiamos la trayectoria de una bola de masa $M > 0$ kilogramos que desciende sin rozamiento por un plano inclinado que forma un ángulo β respecto del eje horizontal y que está sometida únicamente a la fuerza de la gravedad. Podemos suponer que se mueve únicamente en el



$$\left.\begin{array}{r} \alpha(t) = (x(t), y(t)) \in \text{plano inclinado} \\ \tan\beta = \frac{K}{L} \end{array}\right\} \Rightarrow \ \tan\beta = \frac{y}{L-x} \ \Rightarrow \ y = K - \tan(\beta)\, x$$

plano XY, que el desplazamiento horizontal corresponde al eje OX, que la altura $y(t) \geq 0$ se representa en el eje OY, de modo que la trayectoria quedará descrita por una curva plana $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ cuya traza ha de estar sobre la recta $y = K - \tan(\beta)x$. Recordamos que la energía cinética asociada es $E_K = \frac{1}{2}M|\alpha'(t)|^2$ y que la energía potencial (respecto al origen) es $E_P = Mgy(t)$ (siendo $g = 9.8\,m/s^2$).

2.a) Si la bola parte desde una altura de $K > 0$ metros y en $T > 0$ segundos alcanza el nivel del suelo, habiendo recorrido una distancia horizontal de L metros, determina (según el principio de Mínima Acción de Hamilton), el funcional (dependiente de dos funciones) cuyo mínimo es la trayectoria buscada, y el conjunto (con todas sus restricciones) en que crees que debería estar definido.

2.b) Calcula la(s) extremal(es) del problema anterior y justifica, si es posible, la existencia y unicidad de la trayectoria buscada.

2.c) Si $\tan(\beta) = \frac{1}{2}$ y la bola partió del reposo y tardó $\frac{4}{7}$ segundos en llegar abajo, calcula K y L.

Solución: (a) El funcional pedido es

$$\mathcal{F}[x,y] = \int_0^T \left\{ \frac{1}{2}M|\alpha'(t)|^2 - Mgy(t) \right\} dt = M \int_0^T \left\{ \frac{1}{2}\big(x'(t)^2 + y'(t)^2\big) - gy(t) \right\} dt\,,$$

sujeto a las condiciones $\alpha(0) = (x(0), y(0)) = (0, K)$ y $\alpha(T) = (x(T), y(T)) = (L, 0)$ y a la restricción $y = K - \tan(\beta)x$.

(b) Como $x(t)$ e $y(t)$ han de estar relacionadas según la ligadura del apartado anterior, el funcional puede reducirse a uno de variable única, a saber:

$$\mathcal{F}[x] = M \int_0^T \left\{ \frac{1}{2}\big((1 + \tan^2(\beta))x'(t)^2\big) - g(K - \tan(\beta))x \right\} dt$$

Si denotamos $p = x'$ y $F(x,p) = \frac{1}{2}\big((1 + \tan^2(\beta))x'(t)^2\big) - g(K - \tan(\beta))x$, la ecuación de Euler-Lagrange asociada se escribe $0 = F_x - \frac{d}{dt}(F_p) = -g(K - \tan(\beta)) - \big((1 + \tan^2(\beta))x''$, cuyas soluciones son de la forma $x(t) = -\frac{g}{2}\frac{K - \tan(\beta)}{1 + \tan^2(\beta)}t^2 + At + B$, $A, B \in \mathbb{R}$. Finalmente, imponiendo las condiciones de contorno obtenemos $x(t) = -\frac{g}{2}\frac{K-\tan(\beta)}{1+\tan^2(\beta)}t^2 + \big(\frac{L}{T} + \frac{g}{2}\frac{K-\tan(\beta)}{1+\tan^2(\beta)}T\big)t$, luego $y(t) = \frac{g}{2}\tan(\beta)\frac{K-\tan(\beta)}{1+\tan^2(\beta)}t^2 - \tan(\beta)\big(\frac{L}{T} + \frac{g}{2}\frac{K-\tan(\beta)}{1+\tan^2(\beta)}T\big)t + K$. Además, podemos garantizar la existencia y unicidad de mínimo en virtud de la convexidad tanto del funcional como del dominio.

(c) Con los datos del enunciado ha de ser $y(t) = K - \frac{1}{2}x(t)$. Al evaluar en $t = T$ obtenemos $y(T) = K - \frac{L}{2} = 0$, luego ha de cumplirse la relación $L = 2K$. Como además la bola parte del reposo, se tiene $0 = y'(0) = x'(0) = \frac{L}{T} + \frac{g}{2}\frac{K-\tan(\beta)}{1+\tan^2(\beta)}T$, que con nuestros datos se traduce en

$$0 = \frac{2K}{4/7} + \frac{9.8}{2}\left(\frac{K - 1/2}{1 + 1/4}\right)\frac{4}{7} = \frac{7K}{2} + \frac{14}{5} \times \frac{4}{5}(K - 1/2) = \left(\frac{7}{2} + \frac{56}{25}\right)K - \frac{28}{25} = \frac{287}{50}K - \frac{28}{25}\,,$$

de donde resulta $K = \frac{8}{41}$ y $L = \frac{16}{41}$.

3. $\boxed{\text{3 puntos}}$ Considera el funcional $\mathcal{F}[y] = \displaystyle\int_1^e x^3\big(y'(x)\big)^2\,dx$, definido sobre el conjunto

$$\mathcal{D} = \left\{ y \ \in C_0^1([1,e]),\ \int_1^e xy(x)^2\,dx = 1,\ \int_1^e y(x)\,\mathrm{sen}(25\pi\ln(x))\,dx = 0 \right\} \cap C^2([1,e])\,.$$

Calcula sus extremales y determina si tiene mínimo. En caso afirmativo, calcúlalo y determina todas las funciones en las que lo alcanza.

Solución: Denotamos $p = y'(x)$ y $F(y,p) = x^3p^2 - \lambda xy^2$. La ecuación de Euler-Lagrange asociada es

$$0 = F_y - \frac{d}{dx}(F_p) = -2\lambda xy - \frac{d}{dx}(2x^3y'(x)) = -2\lambda xy - 6x^2y'(x) - 2x^3y''(x)\,,$$

o equivalentemente $x^3y'' + 3x^2y' + \lambda xy = 0$, que es una ecuación de Euler que se transforma en la ecuación con coeficientes constantes $z'' + 2z' + \lambda z = 0$ en virtud del cambio de variable $x = e^u$, $z(u) = y(x)$. Los únicos valores propios del problema de contorno determinado por esta ecuación y las condiciones $y(1) = z(0) = 0$, $y(e) = z(1) = 0$, son $\lambda_n = 1 + n^2\pi^2$, $n \geq 1$; mientras que las funciones propias adoptan la forma $y_n(x) = \frac{C}{x}\operatorname{sen}(n\pi\ln(x))$, $C \in \mathbb{R}$. Por la forma específica de las ligaduras (normalización + ortogonalidad), puede afirmarse que el problema de minimización tiene solución, que el mínimo del funcional en $\mathcal{D}$ es el primer valor propio, $\lambda_1 = 1 + \pi^2$, y que este se alcanza en cualesquiera funciones $y_1(x) = \frac{C}{x}\operatorname{sen}(\pi\ln(x))$ que satisfagan ambas ligaduras. La segunda es satisfecha incondicionalmente, en tanto que la primera se cumple si y solamente si

$$1 = C^2\int_1^e \frac{1}{x}\operatorname{sen}^2(\pi\ln(x))\,dx = \frac{C^2}{2}\int_1^e \frac{1}{x}\big(1 - \cos(2\pi\ln(x))\big)\,dx = \frac{C^2}{2}\,,$$

luego ha de ser $C = \pm\sqrt{2}$ para que se alcance el mínimo.