Apellidos				Firma
Nombre	D.N.I o pasaporte	3^oA	3^oB	4^o

EJERCICIO 1. En este ejercicio trataremos de resolver la ecuación del calor en un intervalo acotado y con condiciones Dirichlet en el borde del mismo. Para ello:

1. Calcula la serie de senos de la función $u_0(x) = 1 - |2x-1|$ en el intervalo $[0,1]$.
2. Determina, para $D > 0$, todas las funciones no nulas en variables separadas que resuelvan

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = D\,\partial^2_{xx} u(x,t), & (x,t) \in [0,1]\times[0,\infty), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \geq 0, \end{cases} \tag{1}$$

3. Usando el principio de superposición, calcula una solución de (1) con dato inicial $u(x,0) = u_0(x)$.

Solución: 1. El desarrollo en serie de senos del dato inicial viene dado por

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x)\,,$$

con

$$\begin{aligned} b_n &= 2\int_0^1 u_0(x)\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx = 2\int_0^{1/2} 2x\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx + 2\int_{1/2}^1 (2-2x)\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx \\ &= 4(I_1 - I_2) - \frac{4}{n\pi}\big(\cos(n\pi) - \cos(n\pi/2)\big)\,, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{1/2} x\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx = \Big[-\frac{x}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big]_0^{1/2} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{1/2}\cos(n\pi x)\,dx \\ &= -\frac{1}{2n\pi}\cos(n\pi/2) + \frac{1}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}(n\pi/2)\,, \\ I_2 &= \int_{1/2}^1 x\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx = \Big[-\frac{x}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big]_{1/2}^1 + \frac{1}{n\pi}\int_{1/2}^1\cos(n\pi x)\,dx \\ &= -\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{1}{2n\pi}\cos(n\pi/2) - \frac{1}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}(n\pi/2)\,, \end{aligned}$$

de donde se desprende que

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{2}{n\pi}\cos(n\pi/2) + \frac{4}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}(n\pi/2) + \frac{4}{n\pi}\cos(n\pi) - \frac{2}{n\pi}\cos(n\pi/2) + \frac{4}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}(n\pi/2) \\ &- \frac{4}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{4}{n\pi}\cos(n\pi/2) \\ &= \frac{8}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}(n\pi/2)\,, \end{aligned}$$

luego

$$u_0(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n^2} \operatorname{sen}(n\pi x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \operatorname{sen}((2k+1)\pi x)\,.$$

2. Buscamos soluciones no nulas de (1) que respondan a la forma $u(x,t) = T(t)w(x)$. Al imponer que sea solución de la ecuación del calor obtenemos

$$0 = u_t - Du_{xx} = T'(t)w(x) - DT(t)w''(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = D\frac{w''(x)}{w(x)} = -\lambda \in \mathbb{R}\,,$$

de donde se deduce que T y w han de cumplir, respectivamente,

$$w'' + \frac{\lambda}{D} w = 0\,, \quad w(0) = w(1) = 0\,,$$

y

$$T' = -\lambda T\,.$$

Resolviendo en primer lugar el problema de Sturm-Liouville asociado a w obtenemos que los valores propios son de la forma $\lambda_n = Dn^2\pi^2$, $n \in \mathbb{N}$, en tanto que las funciones propias asociadas son $w_n(x) = A\operatorname{sen}(n\pi x)$, cualquiera que sea $A \in \mathbb{R}$. Por otra parte, al resolver la ecuación para T obtenemos $T_n(t) = Be^{-\lambda_n t} = Be^{-Dn^2\pi^2 t}$, para todo $B \in \mathbb{R}$, de donde resulta que las soluciones que se piden en este apartado son de la forma

$$u_n(x,t) = Ce^{-Dn^2\pi^2 t} \operatorname{sen}(n\pi x)\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

3. La superposición de las soluciones anteriores da lugar a

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} C_n \operatorname{sen}(n\pi x) e^{-Dn^2\pi^2 t}\,.$$

Imponiendo finalmente la condición inicial (que ya fue desarrollada en serie de senos en el apartado 1.) se tiene que ha de ser $C_n = b_n$, por lo que la solución pedida es de la forma

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \operatorname{sen}((2k+1)\pi x)\, e^{-D(2k+1)^2\pi^2 t}\,,$$

que es claramente convergente en virtud del test de comparación de Weierstrass, al igual que sus derivadas parciales $\partial_t u$ y $\partial_{xx}^2 u$ (que además son funciones continuas por tratarse de límites uniformes de sucesiones de funciones continuas).

■

EJERCICIO 2. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio y $f \in L^2(\Omega)$. Demuestra que el funcional

$$\mathcal{F}(u) := \int_\Omega \Big((\partial_x u)^2 + \partial_x u\, \partial_y u + (\partial_y u)^2 + 4u^2 \Big) dx\, dy + \int_\Omega uf\, dx\, dy,$$

definido en $H^1(\Omega)$, tiene un único mínimo global.

Solución: Definimos

$$a(u,v) := \int_\Omega \Big(2\nabla u \cdot \nabla v + 8uv + \partial_x u\, \partial_y v + \partial_x v\, \partial_y u \Big)\, dx\, dy\,, \quad F(v) := -\int_\Omega vf\, dx\, dy\,.$$

El funcional $a(\cdot,\cdot)$ es claramente bilineal y simétrico. Verificamos ahora su continuidad en $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq 2\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + 8\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_x u\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_y v\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_x v\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_y u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 12\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}\,. \end{aligned}$$

Comprobamos finalmente que es un funcional coercivo:

$$a(u,u) \geq \int_\Omega \big(2|\nabla u|^2 + 8u^2 + 2\partial_x u\, \partial_y u\big)\, dx\, dy \geq \int_\Omega \big(|\nabla u|^2 + u^2\big)\, dx\, dy = \|u\|^2_{H^1(\Omega)}\,,$$

para lo que hemos empleado la fórmula notable[1] $2\partial_x u\, \partial_y u \geq -\big((\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2\big) = -|\nabla u|^2$.

Por otra parte, F es claramente lineal y su continuidad en $H^1(\Omega)$ se sigue de la siguiente estimación:

$$|F(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}\,.$$

Tenemos, pues, que todas las hipótesis del teorema de Lax-Milgram son satisfechas (recuérdese que $X = H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert), luego existe un único elemento $u \in H^1(\Omega)$ donde el funcional $\frac{1}{2}a(v,v) - F(v) = \mathcal{F}(v)$ alcanza el mínimo global.

■

EJERCICIO 3. Dado $L > 0$, notamos $C_0^1(0,L)$ el conjunto de funciones y de clase uno en $[0,L]$ tales que $y(0) = y(L) = 0$.

1. Consideramos el problema variacional consistente en minimizar el funcional

$$\mathcal{F}[y] := \int_0^L (y'(x))^2\, dx \quad \text{en el conjunto} \quad \mathcal{D} = \Big\{ y \in C_0^1(0,L) : \int_0^L y^2(x)\, dx = 1 \Big\}.$$

   Encuentra el valor del mínimo $m = m(L)$ y una función $y_m(x)$ donde se alcance. ¿En cuántas funciones se alcanza?

2. En función del mínimo m y de la función $y_m(x)$ que resuelven el apartado anterior, encuentra la constante C más pequeña tal que

$$\int_0^L u(x)^2\, dx \leq C \int_0^L u'(x)^2\, dx \quad \text{para toda } u \in C_0^1(0,L)\,,$$

   y una función no nula que demuestre que la constante C no puede ser menor.

Solución: 1. Construimos en primer lugar la ecuación de Euler-Lagrange asociada a la siguiente corrección del funcional (que incorpora la ligadura integral de $\mathcal{D}$): $F^*(y,p) = p^2 - \lambda y^2$. Se tiene:

$$F_y^* - \frac{d}{dx}F_p^* = 0 \Rightarrow \lambda y + y'' = 0\,,$$

que debe ser resuelta junto con las condiciones de contorno $y(0) = y(L) = 0$. Este problema solo admite soluciones no triviales cuando $\lambda > 0$, las cuales vienen dadas por

$$y(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x)\,.$$

Al imponer ahora las condiciones de contorno concluimos que debe cumplirse $A = 0$ y $B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0$, luego los valores propios son de la forma

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

y las funciones propias son

$$y_n(x) = B\,\mathrm{sen}\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,, B \in \mathbb{R}\,.$$

[1] $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \geq 0$

Por consiguiente, aplicando el teorema de caracterización variacional de valores y vectores propios se concluye que el mínimo de $\mathcal{F}$ es el primero de los valores propios, $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{L^2}$, y se alcanza en la primera función propia: $y_1(x) = B \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)$. Solo falta determinar aquellos valores de $B \in \mathbb{R}$ que hacen que $y_1 \in \mathcal{D}$:

$$1 = \int_0^L y_1(x)^2\, dx = B^2 \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)^2 dx = \frac{B^2 L}{2}\,,$$

por lo que ha de ser $B = \pm\sqrt{\frac{2}{L}}$. En consecuencia, el funcional $\mathcal{F}$ alcanza su mínimo $(= \frac{\pi^2}{L^2})$ en dos funciones:

$$y_1(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{L}}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

2. Basándonos en el apartado anterior es claro que, si tomamos $u \in \mathcal{D}$, el valor más pequeño que podemos escribir en el segundo miembro de la desigualdad es $\frac{C\pi^2}{L^2}$, por lo que tendríamos

$$1 \le \frac{C\pi^2}{L^2} \Rightarrow C \ge \frac{L^2}{\pi^2}\,.$$

Por consiguiente, la constante más pequeña que satisface la desigualdad del enunciado es $C = \frac{L^2}{\pi^2}$, pues si consideramos las funciones $y_1(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{L}}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ se satisface la igualdad.

■

EJERCICIO 4. Se considera la siguiente ecuación de difusión: $\alpha\,\partial_t u = \beta\,\partial^2_{xx} u - \gamma(u-\delta)$, para $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,\infty)$, y donde α, β, γ y δ son constantes positivas.

1. Sean $y = \frac{x}{\lambda}$, $\tau = \frac{t}{\sigma}$ y $v(y,\tau) = \frac{u(x,t)}{\delta} - 1$, donde $u(x,t)$ resuelve la ecuación anterior. Determina las expresiones que deben adoptar σ y λ, en términos de las constantes originales, para que $v(y,\tau)$ satisfaga la ecuación:
$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + v = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\,. \tag{2}$$
2. Resuelve la ecuación (2) sujeta a la condición inicial $v(y,0) = 1$. Por si te resultase útil, recuerda que la transformada de Fourier de la función $f(y) = e^{-\varepsilon^2 y^2}$ es $\hat{f}(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{|\varepsilon|} e^{-\frac{\pi^2 z^2}{\varepsilon^2}}$.
3. Caso de existir, encuentra todas las ondas viajeras asociadas a la ecuación (2). ¿Hay alguna limitación con respecto a la velocidad de propagación de las mismas?

Solución: 1. Se tienen:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\sigma}{\delta}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma}{\alpha\delta}\Big(\beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma(u-\delta)\Big), \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\lambda}{\delta}\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\lambda^2}{\delta}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,.$$

Por consiguiente, para que se satisfaga la ecuación (2) debe cumplirse:

$$\frac{\sigma}{\alpha\delta}\Big(\beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma(u-\delta)\Big) + \frac{u}{\delta} - 1 = \frac{\lambda^2}{\delta}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

de donde se desprende que ha de ser

$$\frac{\sigma\beta}{\alpha\delta} = \frac{\lambda^2}{\delta}\,, \quad \frac{1}{\delta} = \frac{\sigma\gamma}{\alpha\delta}\,, \quad \frac{\gamma\delta\sigma}{\alpha\delta} = 1, \qquad \Leftrightarrow \qquad \sigma = \frac{\alpha}{\gamma}\,, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\,.$$

2. En primer lugar, aplicamos la transformada de Fourier a ambos miembros de la ecuación (2):

$$\frac{\partial \widehat{v}}{\partial \tau} + \widehat{v} = -4\pi^2 z^2 \widehat{v}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{\partial \widehat{v}}{\partial \tau}}{\widehat{v}} = -(1+4\pi^2 z^2)\,,$$

que tiene por solución $\widehat{v}(z,\tau) = \widehat{v}(z,0)e^{-(1+4\pi^2 z^2)\tau}$. Tomando ahora la transformada de Fourier inversa:

$$v(y,\tau) = e^{-\tau}\left(\widehat{v}(z,0)\,\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\widehat{e^{-\frac{y^2}{4\tau}}}\right)^{\vee} = e^{-\tau}\; v(y,0) * \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}e^{-\frac{y^2}{4\tau}} = e^{-\tau}\,\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{w^2}{4\tau}}\,dw = e^{-\tau}\,.$$

3. Buscamos soluciones de la forma $v(y,\tau) = U(y-c\tau)$, donde $c \in \mathbb{R}$ denota la velocidad de propagación de la solución. Se tiene:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = -cU'(y-c\tau)\,, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = U''(y-c\tau)\,,$$

luego existirán soluciones de este tipo si y solamente si se verifica

$$-cU' + U = U'' \Leftrightarrow U'' + cU' - U = 0\,.$$

La ecuación característica asociada tiene por raíces $\mu_{\pm} = \frac{-c\pm\sqrt{c^2+4}}{2}$, luego las soluciones buscadas son de la forma

$$U(z) = Ae^{\mu_+ z} + Be^{\mu_- z}\,, \quad \forall A, B, c \in \mathbb{R}\,.$$

■