UNIVERSIDAD DE GRANADA
Modelos Matemáticos II. 13 de julio de 2020

EJERCICIO 1. Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

(i) Calcula el mínimo del funcional $\mathcal{F}[y] = \int_0^1 y'(x)^2\,dx$, definido en

$$\mathcal{D} = \left\{ y \in C_0^1[0,1] : \int_0^1 y(x)^2\,dx = 1 \right\},$$

y dónde se alcanza.

(ii) Construye el sistema diferencial asociado a las siguientes reacciones químicas

$$A + X \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} 2X\,, \quad B + X \xrightarrow{k_2} C\,,$$

y encuentra los estados de equilibrio correspondientes.

(iii) Calcula, caso de que existan, soluciones decrecientes (no constantes) de tipo onda viajera para la ecuación

$$u_t = Du_{xx} + u,\ D > 0.$$

(iv) Se considera el problema consistente en minimizar el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^1 y'(x)^2\,dx$$

en

$$\mathcal{D} = \left\{ C^1[0,1] : y(0) = y(1),\ y'(0) = y'(1),\ \int_0^1 y(x)^2\,dx = 1 \right\}.$$

¿Existe más de un mínimo? ¿Contradice esto la relación entre la convexidad y la minimización de funcionales? Justifica las respuestas.

(v) Se considera el problema de contorno formado por la ecuación diferencial $x^2y''(x) - xy'(x) - 2y(x) = \cos(\ln(x))$ junto con las condiciones $y(1) = y(e^\pi) = 0$. Determina si tiene o no solución en el intervalo $[1, e^\pi]$.

Solución: (i) La ecuación de Euler-Lagrange asociada a $F^*(y,p) = p^2 - \lambda y^2$ es $y'' + \lambda y = 0$. Imponiendo las condiciones de contorno $y(0) = y(1) = 0$, los únicos valores propios son $\lambda_n = (n\pi)^2$, con $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, el mínimo de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$ es $\lambda_1 = \pi^2$ y se alcanza en $\Phi_1(x) =$

$C\,\mathrm{sen}(\pi x)$. Para acabar basta con imponer la ligadura para determinar el valor de $C \in \mathbb{R}$:

$$1 = C^2 \int_0^1 \mathrm{sen}(\pi x)^2\,dx = \frac{C^2}{\pi} \int_0^\pi \mathrm{sen}(z)^2\,dz = \frac{C^2}{2}\,,$$

luego $C = \pm\sqrt{2}$.

(ii) El sistema diferencial es

$$\begin{aligned}
\frac{d[A]}{dt} &= k_{-1}[X]^2 - k_1[A][X] \\
\frac{d[B]}{dt} &= -k_2[B][X] \\
\frac{d[C]}{dt} &= k_2[B][X] \\
\frac{d[[X]]}{dt} &= k_1[A][X] - k_{-1}[X]^2 - k_2[B][X]\,.
\end{aligned}$$

Los estados de equilibrio son las soluciones de

$$\begin{aligned}
&k_{-1}[X]^2 - k_1[A][X] = 0 \\
&[B][X] = 0 \\
&k_1[A][X] - k_{-1}[X]^2 - k_2[B][X] = 0\,,
\end{aligned}$$

de donde resultan las siguientes posibilidades: si $[X]_{eq} = 0$, entonces $[A]_{eq} = A_0 \geq 0$, $[B]_{eq} = B_0 \geq 0$ arbitrarios. Si $[X]_{eq} \neq 0$, entonces necesariamente $[B]_{eq} = 0$ y $[X]_{eq} = \frac{k_1}{k_{-1}}[A]_{eq}$. Por consiguiente, los estados de equilibrio son de la forma

$$[A]_{eq} = A_0 \geq 0\,, \quad [B]_{eq} = B_0 \geq 0\,, \quad [X]_{eq} = 0\,,$$

o bien

$$[A]_{eq} = A_0 \geq 0\,, \quad [B]_{eq} = 0\,, \quad [X]_{eq} = \frac{k_1}{k_{-1}} A_0\,.$$

(iii) El cambio de variables $u(t,x) = U(z)$, con $z = x - ct$, conduce a

$$DU''(z) + cU'(z) + U(z) = 0\,, \tag{1}$$

cuya ecuación característica tiene por soluciones

$$\lambda_\pm = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4D}}{2D}\,.$$

Si $c^2 > 4D$, entonces $\lambda_\pm$ son reales y distintas (ambas negativas), luego las soluciones de (1) son de la forma

$$U(z) = Ae^{\lambda_+ z} + Be^{\lambda_- z}\,,$$

que no cumplen la condición de frontera de las ondas viajeras en $-\infty$.

Si $c^2 < 4D$, entonces $\lambda_\pm$ son complejas conjugadas y las soluciones de (1) se escriben de la siguiente forma:

$$U(z) = e^{-\frac{c}{2D}z}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{4D-c^2}}{2D}z\right) + B\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{4D-c^2}}{2D}z\right)\right),$$

que tampoco cumplen las condiciones en infinito.

Finalmente, si $c^2 = 4D$ entonces las soluciones vienen dadas por

$$U(z) = Ae^{-\frac{c}{2D}z} + Bze^{-\frac{c}{2D}z},$$

que también violan las condiciones in infinito.

(iv) Por una parte, es obvio que $\mathcal{F} \geq 0$. Por otra parte, las funciones constantes $y = \pm 1$ pertenecen a $\mathcal{D}$ y satisfacen $\mathcal{F}[y] = 0$. Por consiguiente, no hay unicidad de mínimo. Esto no contradice la relación entre convexidad y minimización de funcionales porque la ligadura no es convexa.

(v) Planteamos en primer lugar el problema homogéneo

$$x^2y''(x) - xy'(x) - 2y(x) = 0\,, \quad y(1) = y(e^\pi) = 0\,.$$

Haciendo el cambio de variables $x = e^z$ y $u(z) = y(x)$ se obtiene

$$\frac{du}{dz} = e^z\frac{dy}{dx}\,, \quad \frac{d^2u}{dz^2} = e^z\frac{dy}{dx} + e^{2z}\frac{d^2y}{dx^2}\,,$$

de donde resulta $u'' - 2u' - 2u = 0$, que es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes cuyas raíces características son $\lambda_\pm = 1 \pm \sqrt{3}$. Por tanto, las soluciones son de la forma

$$u(z) = Ae^{\lambda_+ z} + Be^{\lambda_- z}\,.$$

Deshaciendo el cambio de variables recuperamos las soluciones de la ecuación original:

$$y(x) = Ax^{\lambda_+} + Bx^{\lambda_-}\,.$$

Imponiendo ahora las condiciones de contorno obtenemos que la única solución posible es la trivial. En tal situación el teorema de la alternativa de Fredölm garantiza la existencia y unicidad de solución del correspondiente problema no homogéneo.

EJERCICIO 2. Se considera el siguiente problema mixto para la ecuación de ondas unidimensional:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx}\,, \quad t \geq 0,\ x \in [0, L] \\ u(0, x) &= 0\,, \quad x \in [0, L], \\ u_t(0, x) = \frac{3}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right) &, \quad x \in [0, L], \\ u(t, 0) = u(t, L) &= 0\,, \quad t \geq 0\,. \end{aligned}$$

Se pide:

(i) Emplea el método de separación de variables para encontrar una solución.

(ii) ¿Es la solución de (i) la única posible? Argumenta la respuesta.

Solución: (i) Al plantear el método de separación de variables

$$u(t, x) = T(t)w(x)\,,$$

obtenemos $T''(t)w(x) = 4T(t)w''(x)$, o equivalentemente

$$\frac{T''(t)}{4T(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} = -\lambda \in \mathbb{R}\,,$$

lo que da lugar a dos problemas independientes. El primero de ellos consiste en encontrar las soluciones de la ecuación diferencial de segundo orden $w''(x) + \lambda w(x) = 0$, sujetas a las siguientes condiciones de contorno: $w(0) = w(L) = 0$. Para valores del parámetro $\lambda \leq 0$, la única solución posible es la trivial. Si $\lambda > 0$, entonces la solución general viene dada por

$$w(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x)\,.$$

Al aplicar las condiciones de contorno obtenemos

$$A = 0\,, \quad B\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\,L) = 0\,,$$

de donde se deduce que los valores propios son de la forma $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ y las funciones propias $w_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, con $n \in \mathbb{N}$. Ahora resolvemos $T_n''(t) + 4\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T_n(t) = 0$, de donde se obtiene

$$T_n(t) = A\cos\left(\frac{2n\pi t}{L}\right) + B\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi t}{L}\right)\,,$$

por lo que se propone como solución un perfil de la forma

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{2n\pi t}{L}\right) + B_n\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi t}{L}\right)\right]\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,.$$

Imponiendo el dato inicial $u(0,x)=0$ se obtiene $A_n=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Por otra parte

$$\frac{3}{4}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)-\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right)=u_t(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{2n\pi}{L}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

por lo que ha de elegirse

$$B_1=\frac{3L}{8\pi}\,,\quad B_3=-\frac{L}{24\pi}\,,\quad B_n=0\ \text{ si } n\neq 1,3\,.$$

(ii) La solución es única en virtud del método de la energía (desarrollado en clase).

EJERCICIO 3. Se considera el problema consistente en encontrar $u\in H_0^1(0,1)$ tal que

$$\int_0^1\left[ku'(x)v'(x)-v'(x)u(x)-v(x)u'(x)-\frac{1}{2}u(x)v(x)\right]dx=\int_0^1 f(x)v(x)\,dx,$$

para todo $v\in H_0^1(0,1)$ y $f\in L^2(0,1)$, donde $k\in\mathbb{R}$ es un parámetro a determinar.

1. Encuentra los valores de α para los que $f(x)=x^\alpha\ln(x)\in H^1(0,1)$.
2. Determina una condición suficiente sobre el parámetro k que permita afirmar que el problema anterior tiene una única solución para una $f\in L^2(0,1)$ genérica.[1]
3. Por la regularidad de este tipo de problemas sabemos que, caso de existir, la solución $u\in H^2(0,1)$. ¿Qué ecuación de Euler-Lagrange satisface la posible solución del problema de minimización asociado? ¿Es alguna de las extremales un mínimo de dicho problema?

[1] Por si fuese de ayuda: dada $u\in H_0^1(0,1)$, se conoce (véase los apuntes del curso) que la norma usual en H^1 es equivalente a la norma

$$|||u|||_{H^1(0,1)}=\|u'\|_{L^2(0,1)}\,,$$

en virtud de la siguiente desigualdad de Poincaré:

$$\|u\|_{L^2(0,1)}\leq\|u'\|_{L^2(0,1)}\,.$$

Solución: 1. Sea $f(x) = x^\alpha \ln(x)$. Se tiene

$$
\begin{aligned}
\|f\|^2_{L^2(0,1)} &= \int_0^1 x^{2\alpha} \ln(x)^2 \, dx = \int_{-\infty}^0 e^{2\alpha u+1} \, u^2 \, du \\
&= \frac{1}{2\alpha} e^{2\alpha u+1} u^2 \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^0 e^{2\alpha u+1} u \, du \\
&= -\frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{2\alpha} e^{2\alpha u+1} u \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{2\alpha} \int_{-\infty}^0 e^{2\alpha u+1} \, du \right] \\
&= \frac{e}{4\alpha^3} \, ,
\end{aligned}
$$

luego $f \in L^2(0,1)$ para todo $\alpha \neq 0$. Por otra parte, para que $f' = \alpha x^{\alpha-1} \left(\ln(x) + \frac{1}{\alpha}\right)$ esté en $L^2(0,1)$ debe cumplirse (siguiendo un razonamiento análogo al anterior) $\alpha \neq 1$ para que $\int_0^1 x^{2\alpha-2} \ln(x)^2 \, dx$ está acotada y $\alpha > \frac{1}{2}$ para que $\int_0^1 x^{2\alpha-2} \, dx$ lo esté (ver examen de 10 de junio), por lo que debe elegirse $\alpha > \frac{1}{2}$ para que $f \in H^1(0,1)$.

2. Aplicamos el teorema de Lax-Milgram con

$$
\begin{aligned}
a(u,v) &= \int_0^1 \left(k u'(x) v'(x) - v'(x) u(x) - v(x) u'(x) - \frac{1}{2} u(x) v(x) \right) \, dx \\
&= \int_0^1 \left(k u'(x) v'(x) - (u(x)v(x))' - \frac{1}{2} u(x) v(x) \right) \, dx \\
&= \int_0^1 \left(k u'(x) v'(x) - \frac{1}{2} u(x) v(x) \right) \, dx \, , \\
F(v) &= \int_0^1 f(x) v(x) \, dx \, .
\end{aligned}
$$

La aplicación $a(\cdot,\cdot)$ es claramente bilineal. La continuidad se sigue de

$$
\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq k \|u'\|_{L^2(0,1)} \|v'\|_{L^2(0,1)} + \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(0,1)} \|v\|_{L^2(0,1)} \\
&\leq \left(k + \frac{1}{2} \right) |||u|||_{H^1(0,1)} |||v|||_{H^1(0,1)} \, .
\end{aligned}
$$

Análogo para F:

$$
|F(v)| \leq \|f\|_{L^2(0,1)} \|v\|_{L^2(0,1)} \leq |||f|||_{H^1(0,1)} |||v|||_{H^1(0,1)}
$$

Finalmente, la coercividad de $a(\cdot,\cdot)$ se desprende del siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_0^1 \Big(ku'(x)^2 - \frac{1}{2}u(x)^2\Big)\,dx \\ &= k\|u'\|^2_{L^2(0,1)} - \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(0,1)} \geq \left(k - \frac{1}{2}\right)|||u|||^2_{H^1(0,1)}\,, \end{aligned}$$

luego basta con tomar $k > \frac{1}{2}$ para conseguir que el operador $a(\cdot,\cdot)$ sea coercivo. En estas condiciones el teorema de Lax-Milgram garantiza que el problema planteado admite una única solución.

3. Como el operador $a(\cdot,\cdot)$ es además simétrico, el problema del apartado anterior es equivalente al problema de minimización asociado al funcional

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u] &= \frac{1}{2}a(u,u) - F(u) \\ &= \int_0^1 \Big(\frac{k}{2}u'(x)^2 - \frac{1}{4}u(x)^2 - f(x)u(x)\Big)\,dx\,, \end{aligned}$$

cuya ecuación de Euler-Lagrange asociada viene dada por

$$-\frac{1}{2}u - f - \frac{d}{dx}(ku') = 0$$

o, equivalentemente,

$$2ku'' + u + 2f = 0\,.$$

El teorema de Lax-Milgram asegura que existe un único mínimo de $\mathcal{F}$.