**UNIVERSIDAD DE GRANADA**
**Modelos Matemáticos II. 10 de junio de 2020**

**EJERCICIO 1.** Encuentra todas las extremales del funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{y(x)}\,dx$$

definido en

$$\mathcal{D} = \left\{ y \in C^1[0,1] : y > 0,\ y(0)=0,\ y(1)=1 \right\}.$$

¿Alcanza $\mathcal{F}$ un mínimo en alguna de ellas? Justifica la respuesta.
*Sugerencia:* Puede resultarte útil estudiar la convexidad del funcional $\mathcal{G}[u] = \int_0^1 \sqrt{4(u'(x))^2 + e^{-4u(x)}}\,dx$ y relacionarlo luego con $\mathcal{F}$.

*Solución*: La ecuación de Euler-Lagrange asociada a $F(y,p) = \frac{\sqrt{1+p^2}}{y}$ es

$$\begin{aligned}
0 &= F_y - \frac{d}{dx}(F_p) = -\frac{\sqrt{1+p^2}}{y^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{p}{y\sqrt{1+p^2}}\right) \\
&= -\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y^2} - \frac{yy''\sqrt{1+(y')^2} - (y')^2\sqrt{1+(y')^2} - \frac{y(y')^2y''}{\sqrt{1+(y')^2}}}{y^2(1+(y')^2)} \\
&= -\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y^2} - \frac{yy''-(y')^2}{y^2\sqrt{1+(y')^2}} + \frac{(y')^2y''}{y(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{y(y')^2y'' - (yy''-(y')^2)(1+(y')^2) - (1+(y')^2)^2}{y^2(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\frac{(y')^2 + yy'' + 1}{y^2(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}},
\end{aligned}$$

o equivalentemente

$$0 = (y')^2 + yy'' + 1 = (yy')' + 1,$$

de donde se desprende que $yy' = -x + K_1$, luego $(y^2)' = -2x + K_2$. En consecuencia

$$y(x)^2 = -x^2 + K_2x + K_3 \Rightarrow y(x) = \sqrt{-x^2+K_2x+K_3}\,.^{1}$$

[1] Nótese que $y > 0$ en $\mathcal{D}$, por lo que no podemos concluir que $y(x) = \pm\sqrt{-x^2+K_2x+K_3}$

Imponemos finalmente las condiciones de contorno:

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad K_3 = 0\,,$$
$$y(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad K_2 = 2\,,$$

y la única extremal viene dada por

$$y(x) = \sqrt{x(2-x)}\,. \tag{1}$$

Es fácil verificar que Hess$[F]$ no es definido positivo. Por consiguiente, para concluir que la extremal (1) es un mínimo de $\mathcal{F}$ hace falta recurrir a un argumento más sofisticado que la convexidad de $\mathcal{F}$. Para ello observamos en primer lugar que el funcional $\mathcal{G}$ de la sugerencia es convexo. En efecto, si definimos $q = u'$ y $G(x,u,q) = \sqrt{4q^2 + e^{-4u}}$ se tiene

$$G_{uu} = \frac{4\left(1 + 8q^2 e^{4u}\right)}{e^{8u}\left(4q^2 + e^{-4u}\right)^{\frac{3}{2}}} > 0\,,$$
$$G_{qq} = \frac{4e^{-4u}}{\left(4q^2 + e^{-4u}\right)^{\frac{3}{2}}}\,,$$
$$G_{uq} = \frac{8qe^{-4u}}{\left(4q^2 + e^{-4u}\right)^{\frac{3}{2}}}\,,$$

de modo que

$$\det(\text{Hess}[\text{G}]) = G_{uu}G_{qq} - G_{uq}^2 = \frac{16\left(e^{-4u} + 7q^2\right)}{e^{8u}\left(4q^2 + e^{-4u}\right)^3} > 0\,.$$

Por consiguiente, $\mathcal{G}$ es convexo. Para concluir basta con observar que $\mathcal{F}[y] = \mathcal{G}[\log(\sqrt{y})]$, y que el dominio en que $\mathcal{G}$ está definido, a saber:

$$\mathcal{D}_G = \left\{ z \in C^1[0,1] : z < 0,\, \lim_{x \to 0+} z(x) = -\infty, z(1) = 0 \right\}$$

es también convexo.

**EJERCICIO 2.** Usa el método de separación de variables para encontrar una solución del siguiente problema de contorno para la ecuación del calor:

$$u_t = u_{xx}\,, \quad t \geq 0,\ 0 \leq x \leq L,$$
$$u_x(t,0) = u_x(t,L) = 0\,, \quad t \geq 0,$$

sujeto a la condición inicial

$$u(0,x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \quad 0 \leq x \leq L.$$

*Solución*: Consideremos la ecuación $u_t = c^2 u_{xx}$ planteada en $[0,\infty) \times [0, L]$, con condiciones de contorno asociadas $u_x(t,0) = 0$, $u_x(t,L) = 0$. Si planteamos el método de separación de variables $u(t,x) = T(t)w(x)$ se obtiene $T'(t)w(x) - T(t)w''(x) = 0$, o equivalentemente

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} = -\lambda \in \mathbb{R}\,,$$

lo que da lugar a dos problemas independientes. El primero de ellos consiste en encontrar las soluciones de la ecuación diferencial de segundo orden $w''(x) + \lambda w(x) = 0$, sujetas a las siguientes condiciones de contorno: $w_x(0) = w_x(L) = 0$. Si $\lambda = 0$ entonces $w(x) = Ax + B$, e imponiendo las condiciones de contorno resulta que las soluciones son de la forma $w(x) = B \in \mathbb{R}$, luego $\lambda = 0$ es un valor propio. Por otra parte, si $\lambda > 0$ se obtiene $w(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x)$. Al imponer las condiciones de contorno resulta

$$B = 0\,, \quad A\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0\,,$$

de donde se deduce que $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$, también son valores propios. Por consiguiente, las funciones propias vienen dadas por

$$w_0(x) = \text{constante}\,, \quad w_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Resolviendo la ecuación para $T(t)$ obtenemos

$$T_0(t) = A_0 \in \mathbb{R}\,, \quad T_n(t) = Ke^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t},\ n \in \mathbb{N},\ K \in \mathbb{R}\,,$$

por lo que se propone como solución un perfil de la forma

$$u(t,x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} K_n\, e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Aplicando finalmente el dato inicial $u(0,x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$ se tiene que $a_0 = 0$, $K_2 = \frac{1}{2}$ y $K_n = 0$ si $n \neq 2$. Por consiguiente, una solución al problema planteado es

$$u(t,x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{4\pi^2 t}{L^2}} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\,.$$

**EJERCICIO 3.** Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

1. Calcula, caso de que existan, soluciones decrecientes (no constantes) de tipo onda viajera para la ecuación

$$u_t = u_{xxx}.$$

2. Se considera el problema consistente en minimizar el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^1 y'(x)^2\,dx$$

sobre el dominio

$$\mathcal{D} = \left\{ C_0^1[0,1] : \int_0^1 y(x)^2\,dx = 1\,,\ \int_0^1 \operatorname{sen}(5\pi x) y(x)\,dx = 0 \right\}.$$

¿Es posible que tenga más de una extremal? ¿Y más de un mínimo? ¿Contradice esto la relación entre la convexidad y la minimización de funcionales?

3. Pon un ejemplo de un problema de minimización con ligaduras al que a cada multiplicador de Lagrange le correspondan dos o más funciones (extremales) linealmente independientes que resuelvan la correspondiente ecuación de Euler-Lagrange en el dominio. Justifícalo.

*Solución*: 1. El cambio de variables $u(t,x) = U(z)$, con $z = x - ct$, conduce a $-cU'(z) - U'''(z) = 0$ o, denotando $V(z) = U'(z)$, $V''(z) + cV(z) = 0$. La solución de esta ecuación diferencial depende del valor de $c$. Si $c = 0$ se tiene $V(z) = Az + B$, luego $U(z) = \frac{A}{2}z^2 + Bz + C$, que no cumple las condiciones de frontera que hacen falta para que sea una onda viajera. Si $c > 0$ entonces $V(z) = A\cos(\sqrt{c}z) + B\operatorname{sen}(\sqrt{c}z)$, luego $U(z) = \frac{A}{\sqrt{c}}\operatorname{sen}(\sqrt{c}z) - \frac{B}{\sqrt{c}}\cos(\sqrt{c}z) + C$, que tampoco cumple las condiciones de frontera. Finalmente, si $c < 0$ se tiene $V(z) = Ae^{\sqrt{-c}x} + Be^{-\sqrt{-c}x}$, luego $U(z) = \frac{A}{\sqrt{-c}}e^{\sqrt{-c}x} + -\frac{B}{\sqrt{c}}e^{-\sqrt{-c}x} + C$. Este perfil tampoco es de onda viajera porque fallan las condiciones en $\pm\infty$.

2. Sí. Puede tener más de un mínimo sin contradecir ningún teorema porque la primera ligadura no es convexa.

3. Minimizar $\mathcal{F}[y] = \int_0^{2\pi} y'(x)^2\,dx$ en

$$\mathcal{D} = \left\{ y \in C^1(0,2\pi) : y(0) = y(2\pi), y'(0) = y'(2\pi), \int_0^{2\pi} y(x)^2\,dx = 1 \right\}.$$

Definimos $F^*(y,p) := p^2 - \lambda y^2$. La ecuación de Euler-Lagrange asociada a $\mathcal{F}$ es $y'' + \lambda y = 0$. Imponiendo las condiciones de contorno periódicas descritas en $\mathcal{D}$, a saber: $y(0) = y(2\pi), y'(0) = y'(2\pi)$, se obtiene que las extremales son todas de la forma $y_\lambda(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x)$, con $A, B \in \mathbb{R}$.

**EJERCICIO 4.** Se considera el problema consistente en encontrar $u \in H_0^1(0,1)$ tal que

$$\int_0^1 \left[6u'(x)v'(x) - v'(x)u(x) - v(x)u'(x) - \frac{k}{2}u(x)v(x)\right] dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx,$$

para todo $v \in H_0^1(0,1)$ y $f \in L^2(0,1)$, donde $k \in \mathbb{R}$ es un parámetro a determinar.

1. Encuentra los valores de $\alpha$ para los que $f(x) = x^\alpha \in H^1(0,1)$.
2. Usando la siguiente desigualdad de Poincaré para $u \in H_0^1(0,1)$:

$$\|u\|_{L^2(0,1)} \leq \|u'\|_{L^2(0,1)}\,,$$

demuestra que la norma usual en $H^1$ es equivalente a la norma

$$|||u|||_{H^1(0,1)} = \|u'\|_{L^2(0,1)}, \quad \text{si} \quad u \in H_0^1(0,1).$$

3. Determina una condición suficiente sobre el parámetro $k$ que permita afirmar que el problema anterior tiene una única solución.
4. Por la regularidad de este tipo de problemas sabemos que, caso de existir, la solución $u \in H^2(0,1)$.¿Qué ecuación de Euler-Lagrange satisfacen las posibles soluciones del problema de minimización asociado para $f \in L^2(0,1)$ genérica?¿Es alguna de las extremales un mínimo de dicho problema?

*Solución*: 1. Sea $f(x) = x^\alpha$. tiene

$$\|f\|^2_{L^2(0,1)} = \int_0^1 x^{2\alpha}\,dx < \infty \Leftrightarrow \alpha > -\frac{1}{2}\,.$$

Por otra parte, para que $f' = \alpha x^{\alpha-1}$ esté en $L^2(0,1)$ debe cumplirse (siguiendo un razonamiento análogo al anterior) $\alpha > \frac{1}{2}$, por lo que $f \in H^1(0,1)$ si y solo si $\alpha > \frac{1}{2}$.

2. Hecho en las notas de clase (semana 4). Como estamos trabajando en $H_0^1$, basta con tomar $\overline{u} = 0$ en (36).

3. Aplicamos el teorema de Lax-Milgram con

$$
\begin{aligned}
a(u,v) &= \int_0^1 \left(6u'(x)v'(x) - v'(x)u(x) - v(x)u'(x) - \frac{k}{2}u(x)v(x)\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(6u'(x)v'(x) - (u(x)v(x))' - \frac{k}{2}u(x)v(x)\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(6u'(x)v'(x) - \frac{k}{2}u(x)v(x)\right) dx\,, \\
F(v) &= \int_0^1 f(x)v(x)\,dx
\end{aligned}
$$

La aplicación $a(\cdot,\cdot)$ es claramente bilineal. La continuidad se sigue de

$$
\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq 6\|u'\|_{L^2(0,1)}\|v'\|_{L^2(0,1)} + \frac{|k|}{2}\|u\|_{L^2(0,1)}\|v\|_{L^2(0,1)} \\
&\leq \left(6 + \frac{|k|}{2}\right) |||u|||_{H^1(0,1)}|||v|||_{H^1(0,1)}\,.
\end{aligned}
$$

Análogo para $F$:

$$|F(v)| \leq \|x^\alpha\|_{L^2(0,1)}\|v\|_{L^2(0,1)} \leq |||x^\alpha|||_{H^1(0,1)}|||v|||_{H^1(0,1)}$$

para todo $\alpha > \frac{1}{2}$. Finalmente, la coercividad de $a(\cdot,\cdot)$ se desprende del siguiente cálculo:

$$a(u,u) = \int_0^1 \left(6u'(x)^2 - \frac{k}{2}u(x)^2\right) dx = 6\|u'\|^2_{L^2(0,1)} - \frac{k}{2}\|u\|^2_{L^2(0,1)}\,.$$

Si $k > 0$ entonces

$$a(u,u) \geq 6|||u|||^2_{H^1(0,1)} - \frac{k}{2}|||u|||^2_{H^1(0,1)} = \left(6 - \frac{k}{2}\right)|||u|||^2_{H^1(0,1)}\,,$$

luego basta con tomar $0 < k < 12$ para conseguir que el operador $a(\cdot,\cdot)$ sea coercivo. Si $k \leq 0$ directamente se tiene que

$$a(u,u) \geq 6|||u|||^2_{H^1(0,1)}\,.$$

Por consiguiente, el funcional es coercivo para cualquier valor $k < 12$. En estas condiciones el teorema de Lax-Milgram garantiza que el problema planteado admite una única solución.

4. Como el operador $a(\cdot,\cdot)$ es además simétrico, el problema del apartado anterior es equivalente al problema de minimización vinculado al

funcional

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[u] &= \frac{1}{2}a(u,u) - F(u) \\ &= \int_0^1 \left(3u'(x)^2 - \frac{k}{4}u(x)^2 - fu(x)\right)\, dx\,,\end{aligned}$$

cuya ecuación de Euler-Lagrange asociada viene dada por

$$-\frac{k}{2}u - f - \frac{d}{dx}(6u') = 0$$

o, equivalentemente,

$$12u'' + ku + 2f = 0\,.$$

El teorema de Lax-Milgram asegura que existe un único mínimo de $\mathcal{F}$.