Modelos poblacionales I: la ecuación de Malthus discreta

José Luis López Fernández

13 de octubre de 2011

No es una cuestión ideológica. O sea que no me llames fascista ni esas tonterías. Tú sólo dime cuántos habitantes tiene Bruselas. Bueno, te lo digo yo: un millón. Más o menos un millón. ¿Sí? [...] De ese millón, la tercera parte son extranjeros, casi todos árabes [...] Pero, ¿sabes cuántos hijos tienen como media los belgas? ¿y sabes cuántos hijos tienen como media los extranjeros? [...] También te lo voy a decir yo: las familias extranjeras tienen tres veces más hijos que los belgas [...] Es una cuestión de matemáticas [...] Si los extranjeros y los belgas continúan reproduciéndose a ese ritmo, dentro de sólo dos generaciones habrá en Bruselas más extranjeros que belgas. (fragmento de la novela *Las vidas ajenas*, de José Ovejero)

Modelar la progresión experimentada por el tamaño de una determinada población a través de una ecuación en diferencias tiene una componente intuitiva importante. En efecto, si uno pretende predecir el número de individuos con que contará dicha población en el instante asociado a la observación $(n+1)$–ésima, bastará con añadir a los que ya había en el recuento n–ésimo los que han nacido en el periodo interobservacional y sustraer los que han muerto en el mismo periodo, esto es:

$$P_{n+1} = P_n + [NAC]_{n\to n+1} - [DEF]_{n\to n+1}\,, \tag{1}$$

donde, en efecto, $[NAC]_{n\to n+1}$ y $[DEC]_{n\to n+1}$ denotan respectivamente el número promedio de nacimientos y defunciones ocurridos en el periodo comprendido entre las observaciones n y $n+1$. Basta, por tanto, con determinar las cantidades $[NAC]_{n\to n+1}$ y $[DEF]_{n\to n+1}$ para tener completamente descrita la ecuación en diferencias anterior.

Para ello, comenzamos definiendo las cantidades

f = **tasa de fecundidad** = número promedio de nacimientos per cápita acaecidos durante el periodo interobservacional,

m = **tasa de mortalidad** = porcentaje promedio de defunciones (en tanto por uno) acaecidas durante el periodo interobservacional.

Claramente ha de ser $f \geq 0$ y $0 \leq m < 1$ para evitar incongruencias de índole biológica. Por ejemplo, $f = 3$ significaría que cada uno de los individuos con que cuenta la población en el n–ésimo periodo engendra en media tres nuevos individuos en el siguiente recuento; por su parte, afirmar que $m = 0{,}5$ querría decir que la mitad de los individuos con que cuenta la población en el n–ésimo periodo mueren antes de que se lleve a cabo el siguiente recuento. Así las cosas y habida cuenta de que, en virtud de las definiciones anteriores, se tiene que

$$[NAC]_{n\to n+1} = fP_n\,, \quad [DEF]_{n\to n+1} = mP_n\,,$$

la expresión definitiva de la ecuación (1) reza así:

$$P_{n+1} = P_n + fP_n - mP_n = \lambda P_n\,, \quad \text{con} \;\; \lambda = 1 + f - m > 0\,, \tag{2}$$

que recibe el nombre de **ecuación de Malthus discreta**. Si definimos la *razón de crecimiento* como el cociente $R = \frac{P_{n+1}}{P_n}$, es obvio que la ecuación de Malthus proporciona un modelo con razón de crecimiento constante: $R = \lambda$. Y, en términos de la llamada *tasa neta de crecimiento*: $\alpha = \frac{P_{n+1}-P_n}{P_n} = R - 1$, la ecuación de Malthus no es otra que $\alpha = \lambda - 1 = f - m$. [1]

Es sencillo comprobar que, fijado un tamaño inicial P_0, la única solución de la ecuación (2) viene dada por la expresión

$$P_n = \lambda^n P_0\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3}$$

lo que da lugar a tres comportamientos bien diferenciados desde un punto de vista cualitativo:

(a) Si $\lambda = 1$ (es decir, $f = m$) la ecuación pasa a leerse $P_{n+1} = P_n$, la cual genera únicamente soluciones constantes (como puede también cotejarse por medio de la expresión (3)).

(b) Si $\lambda < 1$ (es decir, $f < m$) la población se ve mermada de una observación a la siguiente según un factor λ, lo que a largo plazo ($n \to \infty$) conlleva su extinción. Piénsese, por ejemplo, en el caso $\lambda = \frac{1}{2}$, en el que la población se reduce a su mitad de un recuento al siguiente.

(c) Por el contrario, si $\lambda > 1$ (es decir, $f > m$) el tamaño de la población incrementa de una observación a la siguiente según un factor λ, dando lugar a un crecimiento ilimitado del mismo que a largo plazo ($n \to \infty$) supone $P_n \to \infty$. Piénsese, por ejemplo, en el caso $\lambda = 2$, en el que la población se duplica en cada recuento.

Precisamente este último comportamiento es el foco de una de las mayores críticas que cabe hacer a este controvertido modelo, pues tal tipo de crecimiento ilimitado es inadmisible –cualquiera que sea la población de la que se trate– desde una perspectiva biológica realista. Esto no quita, sin embargo, que dicho modelo sea útil para predecir de manera fiable comportamientos a corto y medio plazo.

La razón principal de esta desavenencia entre el modelado teórico y la aceptación práctica de los resultados estriba en la simplicidad que acompaña a las

[1] ¿Cuánto ha de valer el parámetro malthusiano, λ, para que la tasa neta de crecimiento asociada al modelo sea, por ejemplo, del 10 %?

hipótesis de trabajo sobre las que hemos construido la ecuación (2), que pasan únicamente por admitir que las **tasas** m y f sean **constantes** a lo largo de todo el proceso, esto es, simples números que permanecen invariantes cualquiera que sea el periodo en que estemos haciendo el recuento, independientes por tanto de que el tamaño de la población sea reducido (en cuyo caso es esperable una tasa pequeña de mortalidad y una natalidad razonablemente elevada) o de que el hábitat esté sobrepoblado (caso en el cual es esperable que se dispare la tasa de mortalidad y se reduzca drásticamente la de fecundidad).