Relación de Ejercicios: Sucesiones.

1. Sea A un subconjunto no vacío de números reales y sea x un mayorante de A. Probar que x es el supremo de A si y sólo si existe una sucesión de elementos de A convergente a x.

2. Dar un ejemplo de una sucesión de números reales positivos, convergente a cero, que no sea monótona.

3. Dar un ejemplo de una sucesión de números reales no acotada, que admita una parcial convergente.

4. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y x un número real. Probar:
$$\{x_{2n}\} \to x \text{ y } \{x_{2n+1}\} \to x \implies \{x_n\} \to x \quad .$$

5. Probar que si $|x| < 1$, entonces la sucesión $\{x^n\}$ converge a cero, mientras que si $|x| > 1$ dicha sucesión no está acotada.

6. Probar que si $|x| < 1$, entonces
$$\{1 + x + x^2 + ... + x^n\} \to \frac{1}{1-x}.$$

7. Demostrar que las sucesiones definidas de la forma:

   a) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt{3\ x_n},\ \forall n \in \mathbb{N}$
   b) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1},\ \forall n \in \mathbb{N}$
   c) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \dfrac{4+3x_n}{3+2x_n},\ \forall n \in \mathbb{N}$
   d) $x_1 = \sqrt{a},\ x_{n+1} = \sqrt{x_n + a},\ (a > 0)\ \forall n \in \mathbb{N}$

   son convergentes y calcular su límite. (Sugerencia: estudiar en cada caso monotonía y acotación.)

8. Sea $a \in \mathbb{R}^+$. Consideramos la siguiente sucesión:
$$x_1 = a\ ,\quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$$
   Probar que $\{x_n\}$ es convergente y que su límite, x , verifica $x^2 = a$.

9. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y supongamos que existen $\rho \in]0,1[,\ p \in \mathbb{N}$, tales que $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \rho|x_{n+1} - x_n|$, para todo $n \geq p$. Probar que $\{x_n\}$ es convergente.

   Sugerencia: deducir en primer lugar que $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \rho^n|x_2 - x_1|$ para concluir que $\{x_n\}$ verifica la condición de Cauchy.

10. Estudiar el carácter de la sucesión $\{P(n)\}$ donde P es un polinomio no constante.

11. Sean $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones polinómicas no constantes. Supongamos que $Q(n) \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Estudiar el carácter he la sucesión $\left\{\dfrac{P(n)}{Q(n)}\right\}$.

12. Dar un ejemplo de una sucesión $\{x_n\}$ de números reales no nulos, convergente a cero, y tal que $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ no sea divergente.

13. Sea $\{x_n\} \to +\infty$ e $\{y_n\}$ tal que $y_n \geq x_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Probar que $\{y_n\}$ diverge positivamente.

14. Estudiar la posible convergencia de las siguientes sucesiones y calcular su límite cuando exista:

$a)$ $\left\{\dfrac{1^\alpha + 2^\alpha + ... + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}\right\}, \quad \alpha > -1,$

$b)$ $\left\{\dfrac{1! + 2! + ... + n!}{n!}\right\},$

$c)$ $\left\{\dfrac{1 + 3 + 5 + ... + (2n-1)}{n+1} - \dfrac{2n+1}{2}\right\},$

$d)$ $\left\{\dfrac{1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/n}{\log n}\right\},$

$e)$ $\left\{\dfrac{n^2\sqrt{n}}{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + ... + n\sqrt{n}}\right\},$

$f)$ $\left\{\sqrt[n]{\ln n}\right\},$

$g)$ $\left\{(2^n + 3^n)^{1/n}\right\}.$

$h)$ $\left\{\left(\dfrac{3}{4}\ \dfrac{1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2}{n^3}\right)^{n^2}\right\}.$

15. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales positivos con $\{a_n\} \to a > 0$. Estudiar el carácter de la sucesión

$$\left\{\left[\frac{a_n}{(a_1 a_2 ... a_n)^{1/n}}\right]^{1/n}\right\}.$$

16. Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión de números reales positivos tal que $\{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n\} \to +\infty$ y $\{a_n\}$ cualquier sucesión de números reales. Probar que si $\{a_n\} \to a$ entonces

$$\left\{\frac{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}\right\} \to a$$

17. Estudiar la convergencia de la sucesión:

$$\{ \sqrt[n^2]{a_1 a_2{}^3 a_3{}^5 ... a_n^{2n-1}} \}$$

donde $\{a_n\}$ es una sucesión de números reales positivos convergente a un número real a.

18. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales positivos convergente. Estudiar la convergencia de la sucesión:

$$\left\{ \frac{a_1 + \frac{a_2}{2} + ... + \frac{a_n}{n}}{\log n} \right\}$$

19. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones:

$a)$ $\left\{ \dfrac{\log(n+1)!}{\log[(n+1)^n]} \right\}$,

$b)$ $\left\{ \left[\dfrac{n^2 - 5n + 6}{n^2 + 2n + 1} \right]^{\frac{n^2+5}{n+2}} \right\}$,

$c)$ $\{[1 + \log(n+1) - \log n]^n\}$,

$d)$ $\left\{ \left[\dfrac{n+1}{n^2 + n + 5} \right]^{\frac{1}{1+\log n}} \right\}$,

$e)$ $\left\{ n(\sqrt[n]{2 - \dfrac{1}{n}} - 1) \right\}$,

$f)$ $\left\{ \dfrac{\log n}{n(\sqrt[n]{n} - 1)} \right\}$,

$g)$ $\left\{ \left(\dfrac{\log(n+2)}{\log n} \right)^{n \log n} \right\}$,

$h)$ $\left\{ \left(\dfrac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} \right)^n \right\}$, con $a,\ b > 0$,

$i)$ $\left\{ \left(\dfrac{pa^{1/n} + qb^{1/n} + rc^{1/n}}{p + q + r} \right)^n \right\}$, con $p,\ q,\ r \in \mathbb{R},\ p + q + r \neq 0$.

20. Calcular el límite de la sucesión:

$$\left\{ \frac{e^{a_1} + e^{a_2/2} + ... + e^{a_n/n} - n}{\log(n+1)} \right\}$$

donde $\{a_n\}$ es una sucesión convergente de números reales positivos.

21. Estudiar la posible convergencia de las siguientes sucesiones de números reales:

$$\left\{ \operatorname{sen} \frac{1}{n} \right\} \ , \ \left\{ \cos^2 (\frac{n\pi}{2}) \right\} \ , \ \left\{ \frac{n \operatorname{sen}(n\pi)}{n+1} \right\} \ ,$$

$$\left\{ \frac{\sqrt{n} \operatorname{sen}(n!)}{n+1} \right\} \ , \ \left\{ \frac{\cos(\sqrt{n^2+1}) \log n}{n} \right\} \ .$$