Ejercicios de Cálculo
Relación 1: El conjunto de los números reales

1. Demostrar que $(-x)\,y = -x\,y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

2. Demostrar que si $x \neq 0$ entonces $x^2 > 0$. Como consecuencia $1 > 0$.

3. Probar que si $0 < x < y$, entonces $y^{-1} < x^{-1}$.

4. Demostrar que si $n \in \mathbb{N}$ verifica que n^2 es par, entonces n también lo es.

5. Demostrar que la suma, producto y cociente de dos números irracionales no es necesariamente irracional.

6. La desigualdad triangular nos asegura que $|x+y| \leq |x| + |y|$, $\forall x\,, y \in \mathbb{R}$. Probar que la igualdad es cierta si, y sólo si, $x\,y \geq 0$.

7. Como consecuencia de la desigualdad triangular demostrar que para cualesquiera números $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica:

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$$

   Deducir también que la igualdad se da si y sólo si $x\,y \geq 0$.

8. Resolver las ecuaciones siguientes:

   a) $|(x^2+4x+9)+(2x-3)| = |x^2+4x+9| + |2x-3|$

   b) $|x-1|\,|x+1| = 0$

   c) $|x-1|\,|x+2| = 3$

9. Resolver las inecuaciones siguientes:

   a) $\dfrac{2x-3}{x+2} < \dfrac{1}{3}$

   b) $|x-5| < |x+1|$

   c) $|x-3| < 8$

   d) $|x^2-x| + x > 1$

10. Probar cada una de las desigualdades siguientes y decir, en cada caso cuándo se da la igualdad.

    a) $2xy \leq x^2+y^2$. (Sugerencia: considerar $(x-y)^2$).

    b) $4xy \leq (x+y)^2$. (Sugerencia: deducir de (a)).

    c) $x^2+xy+y^2 \geq 0$. (Sugerencia: deducir de (a)).

11. Probar que si $0<x<1$,$0<y<1$, entonces $0<x+y-xy<1$.

12. Demostrar por inducción las siguientes fórmulas:

    a) $1+2+3+4+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$,$\forall n \in \mathbb{N}$.

    b) $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

    c) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

    d) $1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

13. Demostrar por inducción la desigualdad $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n} \geqslant 1+\dfrac{n}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

14. Demostrar por inducción que todos los números de la forma n^3+5n son múltiplos de 6.

15. Demostrar por inducción que todos los números de la forma $3^{2n}-1$ son múltiplos de 8.

16. Demostar la desigualdad $\sqrt{n} \leqslant 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 2\sqrt{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

17. Probar que si $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, entonces se verifica la siguiente igualdad:

$$1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1} \text{ , } \forall n \in \mathbb{N}$$

18. La desigualdad de Bernouilli asegura que para todo $x \geq 0$ se tiene que

$$(1+x)^n \geq 1+nx \text{ , } \forall n \in \mathbb{N}$$

    Probar la anterior desigualdad por inducción.