

Notas sobre la esperanza y la matriz de varianzas-covarianzas de un vector aleatorio

Definición 1. Dado un vector aleatorio $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)'$, se define su esperanza matemática como el vector $E[\mathbf{x}] = (E[x_1], \dots, E[x_p])'$

A partir de la definición anterior son inmediatas las siguientes conclusiones:

- Si $\mathbf{x}_{p \times 1}$ es un vector aleatorio y $\mathbf{c}_{p \times 1}$ es un vector de constantes, entonces $E[\mathbf{x} + \mathbf{c}] = E[\mathbf{x}] + \mathbf{c}$.
- Si $\mathbf{x}_{p \times 1}$ e $\mathbf{y}_{p \times 1}$ son dos vectores aleatorios, entonces $E[\mathbf{x} + \mathbf{y}] = E[\mathbf{x}] + E[\mathbf{y}]$.
- Si $\mathbf{x}_{p \times 1}$ e $\mathbf{y}_{p \times 1}$ son dos vectores aleatorios y $\mathbf{A}_{n \times p}$ y $\mathbf{B}_{n \times p}$ son dos matrices de constantes, entonces $E[\mathbf{Ax} + \mathbf{By}] = \mathbf{A} E[\mathbf{x}] + \mathbf{B} E[\mathbf{y}]$.
- Como consecuencia del apartado anterior, si $\mathbf{x}_{p \times 1}$ es un vector aleatorio y $\mathbf{a}_{p \times 1}$ es un vector de constantes, entonces $E[\mathbf{a}'\mathbf{x}] = \mathbf{a}' E[\mathbf{x}]$.

Definición 2. Sea $\mathbf{X} = (x_{ij})$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, p$ una matriz aleatoria, esto es, todas sus componentes x_{ij} son variables aleatorias unidimensionales. Se define la esperanza matemática de $\mathbf{X}$ como la matriz cuyas componentes son las correspondientes esperanzas de las variables x_{ij} . O sea $E[\mathbf{X}] = (E[x_{ij}])$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, p$.

Teniendo en cuenta esta definición son inmediatas las siguientes conclusiones:

- Si $\mathbf{X}_{n \times p}$ es una matriz aleatoria y $\mathbf{C}_{n \times p}$ es una matriz de constantes, entonces $E[\mathbf{X} + \mathbf{C}] = E[\mathbf{X}] + \mathbf{C}$.
- Si $\mathbf{X}_{n \times p}$ e $\mathbf{Y}_{n \times p}$ son dos matrices aleatorias, entonces $E[\mathbf{X} + \mathbf{Y}] = E[\mathbf{X}] + E[\mathbf{Y}]$.
- Si $\mathbf{X}_{n \times p}$ e $\mathbf{Y}_{q \times p}$ son dos matrices aleatorias y $\mathbf{A}_{s \times n}$ y $\mathbf{B}_{s \times q}$ son dos matrices de constantes, entonces $E[\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{Y}] = \mathbf{A} E[\mathbf{X}] + \mathbf{B} E[\mathbf{Y}]$.
- Si $\mathbf{X}_{n \times p}$ es una matriz aleatoria y si $\mathbf{A}_{s \times n}$, $\mathbf{B}_{p \times l}$ y $\mathbf{C}_{s \times l}$ son tres matrices de constantes, entonces $E[\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{C}] = \mathbf{A} E[\mathbf{X}]\mathbf{B} + \mathbf{C}$.

A partir de la definición anterior podemos introducir la definición de matriz de varianzas-covarianzas para un vector aleatorio.

Definición 3. Sean $\mathbf{x}_{p \times 1}$ e $\mathbf{y}_{q \times 1}$ dos vectores aleatorios. Se define la covarianza entre ambos vectores, que notaremos por $\text{Cov}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, como la esperanza de la matriz aleatoria $(\mathbf{x} - E[\mathbf{x}])(\mathbf{y} - E[\mathbf{y}])'$.

Observemos que

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] &= \text{E}[(\mathbf{x} - \text{E}[\mathbf{x}])(\mathbf{y} - \text{E}[\mathbf{y}])'] = \text{E} \left[\begin{pmatrix} x_1 - \text{E}[x_1] \\ \vdots \\ x_i - \text{E}[x_i] \\ \vdots \\ x_p - \text{E}[x_p] \end{pmatrix} (y_1 - \text{E}[y_1], \dots, y_j - \text{E}[y_j], \dots, y_q - \text{E}[y_q]) \right] \\
 &= \text{E} \begin{bmatrix} (x_1 - \text{E}[x_1])(y_1 - \text{E}[y_1]) & \cdots & (x_1 - \text{E}[x_1])(y_j - \text{E}[y_j]) & \cdots & (x_1 - \text{E}[x_1])(y_q - \text{E}[y_q]) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_i - \text{E}[x_i])(y_1 - \text{E}[y_1]) & \cdots & (x_i - \text{E}[x_i])(y_j - \text{E}[y_j]) & \cdots & (x_i - \text{E}[x_i])(y_q - \text{E}[y_q]) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_p - \text{E}[x_p])(y_1 - \text{E}[y_1]) & \cdots & (x_p - \text{E}[x_p])(y_j - \text{E}[y_j]) & \cdots & (x_p - \text{E}[x_p])(y_q - \text{E}[y_q]) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \text{Cov}[x_1, y_1] & \cdots & \text{Cov}[x_1, y_j] & \cdots & \text{Cov}[x_1, y_q] \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{Cov}[x_i, y_1] & \cdots & \text{Cov}[x_i, y_j] & \cdots & \text{Cov}[x_i, y_q] \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}[x_p, y_1] & \cdots & \text{Cov}[x_p, y_i] & \cdots & \text{Cov}[x_p, y_q] \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Veamos algunas propiedades y consecuencias inmediatas de la definición anterior:

- Si $\mathbf{x}_{p \times 1}$ e $\mathbf{y}_{q \times 1}$ son dos vectores aleatorios, entonces $\text{Cov}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = E[\mathbf{x}\mathbf{y}'] - (E[\mathbf{x}])(E[\mathbf{y}])'$.
- Si $\mathbf{x}_{p \times 1}$ e $\mathbf{y}_{q \times 1}$ son dos vectores aleatorios y si $\mathbf{a}_{p \times 1}$ y $\mathbf{b}_{q \times 1}$ son dos vectores de constantes, entonces $\text{Cov}[\mathbf{x} - \mathbf{a}, \mathbf{y} - \mathbf{b}] = \text{Cov}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$.
- Si $\mathbf{x}_{p \times 1}$ e $\mathbf{y}_{q \times 1}$ son dos vectores aleatorios y $\mathbf{A}_{s \times p}$ y $\mathbf{B}_{t \times q}$ son dos matrices de constantes, entonces $\text{Cov}[\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{B}\mathbf{y}] = \mathbf{A} \text{Cov}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \mathbf{B}'$.
- Si $\mathbf{x}_{p \times 1}$ e $\mathbf{y}_{q \times 1}$ son dos vectores aleatorios y si $\mathbf{a}_{p \times 1}$ y $\mathbf{b}_{q \times 1}$ son dos vectores de constantes, entonces $\text{Cov}[\mathbf{a}'\mathbf{x}, \mathbf{b}'\mathbf{y}] = \mathbf{a}' \text{Cov}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \mathbf{b}$.

En el caso particular de que $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ tenemos la matriz de varianzas-covarianzas del vector aleatorio $\mathbf{x}$.

Definición 4. Sea $\mathbf{x}_{p \times 1}$ un vector aleatorio p -dimensional. Se define la matriz de varianzas-covarianzas de $\mathbf{x}$, que será notada por $\text{Cov}[\mathbf{x}]$, como la esperanza de la matriz aleatoria $(\mathbf{x} - E[\mathbf{x}])(\mathbf{x} - E[\mathbf{x}])'$.

Observemos que

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}[\mathbf{x}] &= \text{E}[(\mathbf{x} - \text{E}[\mathbf{x}])(\mathbf{x} - \text{E}[\mathbf{x}])'] = \text{E} \left[\begin{pmatrix} x_1 - \text{E}[x_1] \\ \vdots \\ x_i - \text{E}[x_i] \\ \vdots \\ x_p - \text{E}[x_p] \end{pmatrix} (x_1 - \text{E}[x_1], \dots, x_i - \text{E}[x_i], \dots, x_p - \text{E}[x_p]) \right] \\
 &= \text{E} \left[\begin{pmatrix} (x_1 - \text{E}[x_1])^2 & \cdots & (x_1 - \text{E}[x_1])(x_i - \text{E}[x_i]) & \cdots & (x_1 - \text{E}[x_1])(x_p - \text{E}[x_p]) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_i - \text{E}[x_i])(x_1 - \text{E}[x_1]) & \cdots & (x_i - \text{E}[x_i])^2 & \cdots & (x_i - \text{E}[x_i])(x_p - \text{E}[x_p]) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_p - \text{E}[x_p])(x_1 - \text{E}[x_1]) & \cdots & (x_p - \text{E}[x_p])(x_i - \text{E}[x_i]) & \cdots & (x_p - \text{E}[x_p])^2 \end{pmatrix} \right] \\
 &= \begin{pmatrix} \text{Var}[x_1] & \cdots & \text{Cov}[x_1, x_i] & \cdots & \text{Cov}[x_1, x_p] \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{Cov}[x_i, x_1] & \cdots & \text{Var}[x_i] & \cdots & \text{Cov}[x_i, x_p] \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}[x_p, x_1] & \cdots & \text{Cov}[x_p, x_i] & \cdots & \text{Var}[x_p] \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Las siguientes propiedades son consecuencias inmediatas de la definición anterior y de lo expuesto para el operador covarianza anteriormente introducido:

- Si $\mathbf{x}_{p \times 1}$ es un vector aleatorio, entonces $\text{Cov}[\mathbf{x}] = E[\mathbf{x}\mathbf{x}'] - (E[\mathbf{x}]) (E[\mathbf{x}])'$.
- Si $\mathbf{x}_{p \times 1}$ es un vector aleatorio y si $\mathbf{a}_{p \times 1}$ es un vector de constantes, entonces $\text{Cov}[\mathbf{x} - \mathbf{a}] = \text{Cov}[\mathbf{x}]$.
- Si $\mathbf{x}_{p \times 1}$ es un vector aleatorio y $\mathbf{A}_{s \times p}$ es una matriz de constantes, entonces $\text{Cov}[\mathbf{A}\mathbf{x}] = \mathbf{A} \text{Cov}[\mathbf{x}] \mathbf{A}'$.
- Si $\mathbf{x}_{p \times 1}$ es un vector aleatorio y $\mathbf{a}_{p \times 1}$ es un vector de constantes, entonces $\text{Var}[\mathbf{a}'\mathbf{x}] = \mathbf{a}' \text{Cov}[\mathbf{x}] \mathbf{a}$.