Ecuaciones Diferenciales II - Grado en Matemáticas
Relación de ejercicios 5
Curso 2019-20
Ejercicios sobre **estabilidad.**

1. Dada la ecuación $x' = f(x)$, con $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente lipschitziana: prueba que...
   1.a) ... toda solución, o bien es estrictamente monótona, o bien es un equilibrio.
   1.b) ... si una solución verifica $\lim_{t\to\infty} x(t) = p$, entonces p es un equilibrio.
   1.c) ... todo atractor es estable.
   1.d) Esboza el diagrama de fases y estudia, según el signo de $f(x)(x-p)$, la estabilidad de cada equilibrio p.
   1.e) Redemuestra el apartado anterior usando el funcional de Lyapunov $V(x) = (x-p)^2$.

2. Considera una ecuación no autónoma $x' = f(t,x)$ con $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua y localmente lipschitziana respecto de x. Demuestra que todo atractor es estable.

3. En cada caso, calcula los puntos de equilibrio y estudia su estabilidad.

3.a) $\begin{cases} x' = 40\,x^3 + 2\,x\,y - y \\ y' = -20\,x^2 + 10\,x - y \end{cases}$ 3.b) $\begin{cases} x' = (x^2-5x+6)e^{x-y} \\ y' = (y^2-1)e^{x-y} \end{cases}$ 3.c) $\begin{cases} x' = \dfrac{y-x}{x^2+1} \\ y' = \dfrac{x\,y - x - y}{y^2+1} \end{cases}$

4. Se considera el siguiente sistema plano dependiente de un parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x' = -(a\,x)^2 + a(x+2\,y) - (x+2)y \\ y' = (y-2)(y-a) \end{cases}$$

¿Qué debe cumplir a para que $P = (1,2)$ sea un punto de equilibrio asintóticamente estable para este sistema?

5. Estudia las propiedades de estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema plano

$$\begin{cases} x' = x\,|x| + y \\ y' = -x + a\,y \end{cases}$$

donde a es un parámetro real no nulo.

6. Dado el sistema plano: $\begin{cases} x' = y + a\big(x^2+y^2\big)x, \\ y' = -x + a\big(x^2+y^2\big)y. \end{cases}$ Utiliza coordenadas polares para estudiar la estabilidad del origen según los valores del parámetro a.

7. Utiliza el primer método de Lyapunov para estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio de la *ecuación de Lienard* $x'' + f(x)x' + x = 0$ donde $f \in \mathcal{C}^1(I\!R)$.

8. Dado $\Omega \subseteq I\!R^N$ un dominio y una función $U : \Omega \to I\!R$ de clase C^2), consideramos la ecuación diferencial [1]
$$x' = f(x) = -\nabla U(x). \tag{1}$$
Sea $p \in \Omega$ un punto crítico de U. Demuestra que:
   8.a) $x(t) \equiv p$ es un equilibrio de la ecuación (1).
   8.b) Todos los valores propios de la matriz jacobiana de f en p son reales.
   8.c) Si $x(t)$ es solución de (1) definida en I, entonces la curva $t \in I \mapsto x(t)$ es ortogonal a las hipersuperficies de nivel de U.
   8.d) Si p es un mínimo local estricto de U, $x(t) \equiv p$ es un equilibrio a.e. para (1).
   8.e) Si p es un punto de silla de U, $x(t) \equiv p$ es un equilibrio inestable para (1).
   8.f) Si los puntos críticos de U son aislados, toda solución periódica es un equilibrio (cte.).

9. Se considera el sistema plano (conocido como *modelo presa-depredador*):
$$\begin{cases} x' = (\alpha_1 - \beta_1 y)x \\ y' = (\alpha_2 x - \beta_2)y \end{cases} \qquad x > 0, y > 0$$
donde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$. Verifica que el primer método de Lyapunov no proporciona información sobre la estabilidad del único punto de equilibrio del sistema. Calcula una función de Lyapunov que nos permita asegurar que dicho equilibrio es estable pero no asintóticamente estable. No olvides comprobar que se verifican las hipótesis del teorema que aplicas.

10. Calcula funciones de Lyapunov para estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio de los siguientes sistemas autónomos:
$$\text{10.a)} \begin{cases} x' = 2x^3y^2 - x \\ y' = -y \end{cases} \qquad \text{10.b)} \begin{cases} x' = -x\,y^4 \\ y' = y\,x^4 \end{cases} \qquad \text{10.c)} \begin{cases} x' = -6y^5\,e^{x+y} \\ y' = 2(x-1)\,e^{x+y} \end{cases}$$

11. Estudia las propiedades de estabilidad de los puntos de equilibrio de la ecuación de segundo orden
$$x'' + f(x) = 0$$
en los siguientes casos: $f(x) = x^{2n-1}$ con $n \in \mathbb{N}$ y $f(x) = x - x^3$.

[1] (1) se suele denominar *sistema gradiente*.

12. Dado $a \in I\!R$ se considera el sistema

$$(S)_a : \begin{cases} x' = ay - (x^3 + xy^2) \\ y' = ax - (y^3 + x^2y) \end{cases} .$$

Estudia la estabilidad del origen según los distintos valores del parámetro a

13. Dadas $p, q, r, s \in C^1(I\!R)$, con $p(0) \neq 0,\ q(0) \neq 0$, se considera el sistema autónomo plano

$$\begin{cases} x' = p(x)r(y), \\ y' = -s(x)q(y). \end{cases} \tag{2}$$

13.a) ¿Bajo qué condiciones es el origen un punto de equilibrio para este sistema?

13.b) Demuestra que existe un entorno Ω del origen y una función $V : \Omega \to I\!R$ de clase C^1 tal que $\dot{V}(x, y) = 0$, para cualesquiera $(x, y) \in \Omega$.

13.c) Determina condiciones sobre el valor de las funciones r, s, p, q y de sus derivadas en $(x, y) = (0, 0)$ que permitan asegurar que el origen es un punto de equilibrio estable y no asintóticamente estable para el sistema (2).

13.d) Proporciona un ejemplo explícito no lineal en el que se verifiquen esas condiciones. ¿Se podría aplicar el primer método de Lyapunov para estudiar la estabilidad de ese equilibrio?

14. Se considera el sistema autónomo de ecuaciones diferenciales en $I\!R^2$ dependiente de un parámetro $a \in I\!R$

$$\begin{cases} x' = e^{ay} - e^x \\ y' = ax^2 + (a - a^2)x + ay^2e^{-y} \end{cases}$$

Debes estudiar la estabilidad del punto de equilibrio $p = (0, 0)$ en los siguientes casos:

14.a) Cuando $a \neq 0$ y $a \neq 1$.

14.b) Cuando $a = 1$ (te recomiendo buscar una función de Lyapunov a la que aplicar el teorema de Chetaev).

14.c) Cuando $a = 0$.

15. Dado el sistema plano: $\begin{cases} x' = y + a\big(x^2 + y^2\big)x_1, \\ y' = -x + a\big(x^2 + y^2\big)y, \end{cases}$ utiliza coordenadas polares para estudiar la estabilidad del origen según los valores del parámetro a.

16. Dadas $g_1, g_2 : \Omega \subseteq I\!R^2 \to I\!R$ de clase C^2 y verificando $|g_i(x, y)| \leq k(x^2 + y^2)^2$, para cierto $k > 0$, consideramos el sistema autónomo siguiente:

$$\begin{cases} x' = x + g_1(x, y), \\ y' = -y + g_2(x, y), \end{cases}$$

estudia la estabilidad del equilibrio $p = (0, 0)$. (Sugerencia: puedes usar un funcional de Lyapunov de la forma $V(x, y) = x^2 + by^2$, para cierto $b \in I\!R$).