Ecuaciones Diferenciales II - Grado en Matemáticas
Relación de ejercicios n 4
Curso 2019-20

1. Decide de forma razonada si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

   (a) Sea $x_\epsilon(t)$, $\epsilon \geq 0$, la solución de $x'' + \epsilon x' + x^3 = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$. Entonces $x_\epsilon(t)$ está definida en $[0, \infty)$ y
   $$\lim_{\epsilon \to 0} x_\epsilon(t) \ = \ x_0(t), \text{ para cada } t \geq 0.$$

   (b) Sea $x_\epsilon(t)$, $\epsilon \geq 0$, la solución de $\epsilon x' + x^3 = 0$, $x(0) = 1$. Entonces $x_\epsilon(t)$ está definida en $[0, \infty)$ y
   $$\lim_{\epsilon \to 0} x_\epsilon(t) \ = \ 0, \text{ para cada } t \geq 0.$$

   (c) Sea $x_\epsilon(t)$ la solución de $x' + \epsilon\, \mathrm{sen} x = 0$, $x(0) = 1$, $\epsilon \in I\!R$. Entonces $x_\epsilon(t)$ está definida en $[0, 1]$ y
   $$\lim_{\epsilon \to 0} x''_\epsilon(t) \ = \ 0, \text{ uniformemente en } [0, 1].$$

2. Se considera el problema $x' = \mathrm{sen}\ (\epsilon x)$, $x(0) = 1$, $\epsilon > 0$. Sea $x_\epsilon(t)$ la solución correspondiente. Estudia si $x_\epsilon(t)$ está definida en $(-\infty, \infty)$ y calcula, si existe, su límite cuando $\epsilon \to 0$. Idénticas cuestiones para el problema $\epsilon x' = x^2$, $x(0) = 1$, $\epsilon > 0$.

3. Se considera el P.V.I.
   $$(P_\epsilon) \begin{cases} x'' + \epsilon f(x') + x = 0 \\ x(0) = 1, \ x'(0) = 0 \end{cases},$$
   donde $\epsilon \geq 0$ es un parámetro, $f \in C^1(I\!R)$, $f(u)u \geq 0$, para $u \in I\!R$. El problema (P_ϵ) representa el movimiento de un oscilador armónico sometido a una fuerza de rozamiento $-\epsilon f(x')$.

   (a) Prueba que (P_ϵ) tiene una única solución $x_\epsilon(t)$ definida en $[0, \infty)$.

   (b) Demuestra que dado $a > 0$, $x_\epsilon(t) \to x_0(t)$ y $x'_\epsilon(t) \to x'_0(t)$ uniformemente en [0,a] si $\epsilon \to 0^+$. Calcula $x_0(t)$.

   (c) Demuestra que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que, si $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, $x_\epsilon(t)$ es estrictamente decreciente en $[\pi/4, 3\pi/4]$.

   (d) Demuestra que para ϵ suficientemente pequeño $x_\epsilon(t)$ se anula en un único punto $t_\epsilon \in [\pi/4, 3\pi/4]$ y se verifica que
   $$\lim_{\epsilon \to 0^+} t_\epsilon \ = \ \pi/2.$$

4. Sea $F : I\!R^2 \to I\!R$ de clase uno y T–periódica ($T > 0$) en la variable t, es decir,

$$F(t,x) = F(t+T,x) \quad \forall (t,x) \in I\!R^2.$$

Denotemos por $x(t;x_0)$ a la solución del PVI

$$x' = F(t,x),\ x(0) = x_0.$$

Supongamos que existen $x_1, x_2 \in I\!R$, con $x_1 < x_2$, tales que

$$F(t,x_1) > 0, F(t,x_2) < 0 \quad \forall t \in I\!R.$$

Se pide:

(a) Prueba que la función $P : [x_1, x_2] \to I\!R$, $P(x_0) = x(T;x_0)$ está bien definida y es continua.

(b) Demuestra que existe $x^* \in [x_1, x_2]$ tal que $P(x^*) = x^*$.

(c) Deduce que la solución $x(t, x^*)$ es una función T–periódica.

5. Dado $\epsilon > 0$, sea $x(t;\epsilon)$ la solución maximal del PVI

$$\varepsilon x' = x^2 + (1-\varepsilon)t,\ x(0) = 1\,.$$

(a) Prueba que para todo $T > 0$ y todo $s \in (0,1)$ se verifica

$$\lim_{\epsilon \to 1} x_\epsilon(t) = \frac{1}{1-t}$$

uniformemente en $[-T, s]$.

(b) Calcula $\frac{\partial x}{\partial \epsilon}(t;1)$.

(c) ¿ Se puede aplicar el teorema de diferenciabilidad respecto de parámetros para calcular $\frac{\partial x}{\partial \epsilon}(t;0)$?.

6. Para cada $\epsilon \in I\!R$, sea $x(t;\epsilon)$ la solución del PVI $x' = (1+\epsilon)x - \epsilon x^2 - 1$ con $x(0) = 2$. Se pide:

(a) Demuestra que si $\epsilon \in [0, \frac{1}{2}]$, entonces $x(t;\epsilon)$ está definida en $I\!R$.

(b) Prueba que $\forall T > 0$, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que si $-\epsilon_0 < \epsilon < 0$ entonces $x(t;\epsilon)$ está definida en $[0, T]$.

(c) Calcula $(\partial x/\partial \epsilon)(t, 0)$.

7. Sea $x(t;\varepsilon)$ la solución del p.v.i.

$$x'' + x + \varepsilon x^2 = \varepsilon \cos t,\ x(0) = 1,\ x'(0) = \varepsilon.$$

Calcula, si existe, $(\partial x/\partial \epsilon)(t, 0)$.

8. *(C. Ordinaria 17-18)* Sea $x(t;c)$ la solución maximal del problema de valores iniciales para la ecuación del péndulo

$$\begin{cases} x'' + cx' + \sin(x) = 0, \\ x(0) = \pi, \ x'(0) = c. \end{cases} \tag{1}$$

   (a) Calcula, si es posible,
   $$\frac{\partial x}{\partial c}(t;0).$$

   (b) Justifica que para cada $R > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que si $|c| < \varepsilon$ entonces $x(t;c) > 0, \ t \in [-R, R]$.

9. *(C. Extraordinaria 17-18)* Sea $x(t;\lambda,\varepsilon)$ la solución maximal de

$$\begin{cases} x' = \lambda x^2 + 2\varepsilon t \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

   calcula las siguientes funciones: $x(t;0,\varepsilon)$, $\frac{\partial}{\partial \lambda} x(t;0,\varepsilon)$ y $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} x(t;0,\varepsilon)$.

10. *(C. Ordinaria 18-19)* Para cada $\lambda \in I\!R$ denotamos por $(x(t;\lambda), y(t;\lambda))$ la solución maximal del p.v.i.

$$\begin{cases} x' = (1-\lambda)x^2 + \lambda, & x(0) = 1 \\ y' = xy, & y(0) = \lambda. \end{cases}$$

   (a) Determina $(x(t;\lambda), y(t;\lambda))$ cuando $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$, indicando en cada caso su intervalo maximal de definición.

   (b) Justifica que existe
   $$\lim_{n\to\infty} y\left(\frac{2n}{n+1}; \frac{n^2}{n^2+1}\right)$$
   y determina dicho límite.

   (c) Calcula
   $$\frac{\partial y(-1;0)}{\partial \lambda},$$
   justificando previamente su existencia.