Ecuaciones Diferenciales II - Grado en Matemáticas
Relación de ejercicios nº 3
Curso 2019-20

1. Sean x_1, $x_2 : I \to \mathbb{R}$ dos soluciones de
$$x' = f(t,x)$$
donde $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua y para cada $t \in I$ la función $x \to f(t,x)$ es creciente.
   (a) Demuestra que $|x_1(t) - x_2(t)|^2$ es creciente.
   (b) Justifica que los problemas de valores iniciales asociados a la ecuación diferencial tienen unicidad hacia el pasado.
   (c) Usa este resultado para demostrar que $\left\{ \begin{array}{l} x' = \sqrt[3]{x}, \\ x(0) = x_0, \end{array} \right.$ tiene una única solución (global) si $x_0 \neq 0$. ¿Sigue siendo cierta esta afirmación si $x_0 = 0$?

2. En los casos que siguen, justifica que el problema de valores iniciales dado tiene una única solución definida, al menos, sobre el intervalo que se indica:
   (i) $x' = e^x$, $x(0) = 1$, en $]-\infty, 0]$.
   (ii) $x' = (t + \sqrt{x}) \log(x)$, $x(1) = \pi$, en $[1, +\infty[$.
   (iii) $x'' + x' + x^3 = 0$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$, en $[0, +\infty[$.
   (iv) $\left\{ \begin{array}{ll} x' = -y + e^t(x^2 + y^2 - 1), & x(0) = 0, \\ y' = x + t^3(x^2 + y^2 - 1), & y(0) = 0, \end{array} \right.$ en $\mathbb{R}$.

3. En los casos que siguen, justifica que todas las soluciones de la ecuación diferencial dada son prolongables al intervalo I indicado. ¿Hay unicidad para los problemas de valores iniciales?
   (i) $x''' + \operatorname{sen}(t)x - \log(t) = 1$, con $I =]0, +\infty[$.
   (ii) $x' = \max\{t, x\} - \operatorname{sen}(t)$, con $I = \mathbb{R}$.
   (iii) $x'' + x' + \operatorname{sen}(x) = 0$, con $I = \mathbb{R}$.
   (iv) $x' = (t^2 + x^2) \operatorname{sen}(x)$, con $I = \mathbb{R}$.
   (v) $\left\{ \begin{array}{l} x' = y^2, \\ y' = \operatorname{sen}(x), \end{array} \right.$ con $I = \mathbb{R}$.

4. [Principio de comparación de soluciones.]
Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D dominio, continua, localmente lipschitziana en x. Sean x_1 y x_2 dos soluciones de $x'(t) = f(t, x(t))$ definidas en un intervalo abierto I. Demuestra que si $x_1(t_0) < x_2(t_0)$ para algún $t_0 \in I$, entonces la desigualdad $x_1(t) < x_2(t)$ sigue siendo cierta para todo $t \in I$.

5. Si en el ejercicio anterior se sustituye la ecuación $x' = f(t,x)$ por $x'' = f(t,x)$, ¿se sigue cumpliendo el principio de comparación?

6. Prueba que el PVI: $x' = x^2 + x - 2$, con $x(0) = 0$, tiene una única solución definida en $\mathbb{R}$, y que dicha solución admite límites en $-\infty$ y en $+\infty$. Calcula dichos límites. (Sugerencia: calcula las posibles soluciones constantes).

7. [Principio de comparación de ecuaciones.]
   Sea D un dominio de $\mathbb{R}^2$ y sean $f_1,\ f_2 : D \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que
   $$f_1(t,x) < f_2(t,x) \qquad \forall (t,x) \in D.$$
   Sean x_1 y x_2 sendas soluciones $x' = f_1(t,x)$ y $x' = f_2(t,x)$, ambas definidas en un intervalo abierto I. Demuestra que si $x_1(t_0) < x_2(t_0)$ para algún $t_0 \in I$, entonces la desigualdad $x_1(t) < x_2(t)$ sigue siendo cierta a para todo $t \in I$, con $t \geq t_0$.

8. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio abierto y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua. Supongamos que existen constantes $M, c > 0$ y $r > 1$ tales que
   $$f(t,x) \geq c\, x^r \text{ para todo } (t,x) \in \Omega \text{ con } x \geq M\,,$$
   y sea $x :]\alpha,\omega[\to \mathbb{R}$ una solución de la ecuación $x' = f(t,x)$ con $x(t_0) \geq M$ para algún instante $t_0 \in]\alpha,\omega[$. Justifica que $\omega < +\infty$ (usa si quieres el ejercicio anterior).

9. Sea $\binom{x}{y} : I \to \mathbb{R}$ la solución maximal de $\left\{ \begin{array}{ll} x' = \cos(x)(t - y^2)\,, & x(0) = 0 \\ y' = xy\,, & y(0) = 1 \end{array} \right.$. Prueba:

   a) $|x(t)| < \frac{\pi}{2}\ \forall t \in (\alpha,\omega)$.
   b) $0 < y(t) < e^{\frac{\pi}{2}t}\ \ \forall t \in (\alpha,\omega)$.
   c) $\alpha = -\infty$, $\omega = \infty$.
   d) la ecuación no es sublineal.

10. Se considera el sistema
    $$(S) : \begin{cases} x' = -t^2(x^3 + xy^2) \\ y' = -t^2(y^3 + x^2 y) \end{cases} \quad ,$$
    y la función $V(x,y) := x^2 + y^2,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

    a) Demuestra que V es decreciente a lo largo de las soluciones de (S).
    b) Sea $(x,y) :]\alpha,\omega[\to \mathbb{R}^2$ una solución maximal de (S). Justifica que $\omega = +\infty$.
    c) Demuestra que si (x,y) no es la solución trivial, $(x(t),y(t)) \equiv (0,0)$, entonces α es finito. (Sugerencia: ¿qué ecuación diferencial cumple $\rho(t) = V(x(t),y(t))$?)

11. Consideramos el sistema de ecuaciones diferenciales
    $$\begin{cases} x' = (x^2 + y^2 - 1)x - (\cos x)y \\ y' = (x^2 + y^2 - 1)y + (\cos x)x \end{cases} .$$

    a) ¿Tiene este sistema crecimiento a lo sumo lineal?
    b) Dada una solución maximal $(x,y) :]\alpha,\omega[\to \mathbb{R}^2$, determina si α y ω son finitos o no en función de $x(0)$ e $y(0)$. (*Indicación:* Estudia la ecuación diferencial que cumple $\rho(t) := x(t)^2 + y(t)^2$.)