Ecuaciones Diferenciales II - Grado en Matemáticas
Relación de ejercicios nº 2
Curso 2019-20

1. Para las siguientes funciones, halla una constante de Lipschitz en la región indicada o bien demuestra que no existe:

   a) $f(x) = e^x\,, \quad x \in \mathbb{R}.$

   b) $f(x) = e^x\,, \quad x \in [a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

   c) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}\,, \quad x \in [-1, 1].$

   d) $f(x) = \frac{1}{x}\,, \quad x \in [1, +\infty[.$

   e) $f(x, y) = (x + 2y, -y)\,, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

   f) $f(x, y) = \frac{xy}{1+x+y}\,, \quad x^2 + y^2 < \frac{1}{2}.$

   g) $f(x) = x \ln |x|\,, \quad x \neq 0\,; \quad f(0) = 0\,.$

2. Escribe los primeros términos del esquema de iteración de Picard para cada uno de los siguientes P.V.I. y, cuando sea posible, encuentra explícitamente la solución:

   (i) $x' = x + 2, \;\; x(0) = 2.$

   (ii) $x' = x^{4/3}, \;\; x(0) = 0.$

   (iii) $x' = x^{4/3}, \;\; x(0) = 1.$

   (iv) $x' = \operatorname{sen} x, \;\; x(0) = 0.$

   (v) $x' = x/2, \;\; x(1) = 1.$

   (vi) $\begin{cases} x' = y, \\ y' = \operatorname{sen} x \end{cases}, \quad x(0) = \pi, \; y(0) = 0.$

3. Se dice que una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **lineal a trozos** si existen

$$-\infty = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = +\infty$$

   tales que f es lineal en cada intervalo $]x_i, x_{i+1}[, \; i = 0, 1, 2, \cdots, k$; es decir,

$$f(x) = a_i x + b_i \quad x \in]x_i, x_{i+1}[\,, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, k, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}\,.$$

   Prueba que las funciones lineales a trozos son globalmente lipschitzianas.

4. (**¡MUY importante!**) Sea $f \in C(\mathcal{D}; \mathbb{R}^N)$, con $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un dominio, tal que existe $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C(\mathcal{D}; \mathbb{R}^N)$, para cada $i = 1, 2, \cdots N$. Demuestra que f es localmente lipschitziana respecto de x en $\mathcal{D}$.

5. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función lipschitziana y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Prueba que la ecuación

$$x' = f(x)\,, \quad y' = g(x)y$$

tiene una única solución para unas condiciones iniciales dadas. Calcula la solución en el siguiente caso particular:

$$\begin{cases} x' = 2|x|\,, y' = y\sqrt{|x|} \\ x(0) = 1\,, y(0) = 3\,. \end{cases}$$

6. Demuestra que existe una función continua en $[0, 1]$ tal que

$$f(t) = \frac{1}{3}\int_0^t s^2 \operatorname{sen}(f(s))\, ds \quad \forall\, t \in [0, 1]\,.$$

¿Es única?.

7. a) Dado X espacio métrico completo, sea $T : X \to X$ tal que existe un $k \in \mathbb{N}$ para el que T^k es una contracción. Demuestra que T tiene un único punto fijo.

   b) Prueba que existe una única función continua en $[0, 1]$ que cumple

$$x(t) = \operatorname{sen}(t) + \int_0^t \frac{x(s)}{\sqrt{s}}\, ds \quad \forall\, t \in [0, 1]\,.$$