Ecuaciones Diferenciales II - Grado en Matemáticas
Relación de ejercicios nº 1
Curso 2019-20

1. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ una función de clase C^1, donde $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ es un *dominio* (es decir, abierto y conexo). Justifica que las soluciones de la ecuación diferencial $x' = f(t, x)$ son de clase C^2. Generaliza este resultado para funciones f de clase C^p con $p \geq 2$.

2. Encuentra una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ continua pero no de clase C^1 y de forma que todas las soluciones de la ecuación diferencial $p' = f(p)$ sean de clase C^∞.

3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{dN}$ un dominio y $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ una función continua. Consideramos la ecuación diferencial de orden d:

$$x^{(d)} = f(t, x(t), \ldots, x^{(d-1)}(t)) \,. \tag{$*$}$$

   a) Da una definición precisa de solución de $(*)$.

   b) Dada $x \in C^d(I, \mathbb{R}^N)$ definimos $X : I \to \mathbb{R}^{dN}$ por $X(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(d-1)}(t) \end{pmatrix}$. Encuentra una función continua $F : \Omega \to \mathbb{R}^{dN}$ de manera que $x : I \to \mathbb{R}^N$ sea solución de $(*)$ si y solo si $X(t)$ es solución de $X' = F(t, X)$.

4. En los casos siguientes encuentra el dominio de la ecuación diferencial y los posibles intervalos de definición de la solución propuesta:

$$a)\ x' = \sqrt{1 - x^2},\ \ x(t) = \operatorname{sen} t\,, \qquad b)\ \ddot{x} = -\mu \frac{x}{\|x\|^3},\ \ x(t) = \sqrt[3]{\frac{9\mu\, t^2}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ , \quad (\mu > 0)\,.$$

5. Dada la función $f \in C(\mathbb{R}^2)$ consideramos la siguiente ecuación de Volterra

$$x(t) = 5e^{3t} + \int_0^t e^{3(t-s)} f(s, x(s))\, ds.$$

   Encuentra un PVI equivalente.

6. En cada uno de los casos que siguen, dibuja el campo de direcciones de la ecuación diferencial $x' = f(t, x(t))$ y la gráfica de la solución $x = x(t)$ dada:

   a) $f(t, x) = 1,\ x(t) = 2{+}t$; *b*) $f(t, x) = \operatorname{sen} x,\ x(t) = \pi$; *c*) $f(t, x) = x/t,\ x(t) = 3t\,.$

7. Encuentra soluciones de las ecuaciones/sistemas de ecuaciones integrales siguientes:

$$a)\ x(t) = 2 + \int_1^t x(s)^2 ds\,; \qquad b) \begin{cases} x(t) = \displaystyle\int_0^t y(s)ds \\ y(t) = \displaystyle\int_0^t x(s)ds + \cos(t) \end{cases} \quad ;$$

$$c) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} y(s) \\ \operatorname{sen}(x(s)) \end{pmatrix} ds.$$

8. Sean $\{x_n\},\ \{y_n\} \subset C([0,1], \mathbb{R}^N)$ sucesiones equicontinuas. ¿Son equicontinuas las sucesiones $\{x_n + y_n\}$ y $\{x_n y_n\}$?

9. Se considera la sucesión de funciones

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \operatorname{sen}(nx)\,.$$

Decide razonadamente si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

(i) La sucesión es uniformemente acotada.

(ii) La sucesión es equicontinua.

(iii) Existe una sucesión parcial de $\{f_n\}$ que converge uniformemente en $[0,1]$.

10. Demuestra que la sucesión de funciones $f_n(t) = \dfrac{\operatorname{sen}(nt)}{\sqrt{n}}$ converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}$. ¿Qué se puede decir acerca de la convergencia de $f_n'(t)$?

11. Sean I un intervalo compacto y $f_n \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ una sucesión de funciones tal que $\{f_n'\}$ es uniformemente acotada. Demuestra que $\{f_n\}$ es equicontinua.