Universidad de Granada
Dept. Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias

Examen extraordinario
Curso 2019/20
04-feb-2020

ECUACIONES DIFERENCIALES II
3º.A y 3º.B
Grado en Matemáticas

1. Determina la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

   1.1) Las sucesiones $x_n(t) = \cos(n\,t)$ e $y_n(t) = \cos\left(\dfrac{t}{n}\right)$ son equicontinuas en $\mathbb{R}$.

   1.2) La función $f(x) = \sqrt{|x|}$ es localmente lipschitziana en $\mathbb{R}$.

   1.3) La ecuación integral $x(t) = \displaystyle\int_0^t x(s)^{1/3}\,ds$, tiene una única solución maximal definida en $\mathbb{R}$.

   1.4) La solución de $x'(t) = \dfrac{x^2(t)}{1-t}$ que cumple $x(0) = 1$ está definida en el intervalo $(-\infty, 1)$.

   1.5) El siguiente PVI: $x'(t) = e^t + |x(t)|$ con $x(0) = 1$, tiene una única solución maximal definida en todo $\mathbb{R}$ y de clase $C^\infty(\mathbb{R})$.

$\boxed{1.1)}$ Falso. $x_n(t)$ no lo es (notamos que sus derivadas $x'(t) = -n\,\mathrm{sen}(nt)$ no están acotadas, lo que nos da la pista). Repasamos conceptos sobre equicontinuidad:

afirmación: Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que $\|x_n(t) - x_n(s)\| < \varepsilon$ siempre que $|t-s| < \delta_\varepsilon$ y $n \in \mathbb{N}$,

negación: Existe un $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para cualquier $\delta > 0$ podemos encontrar t_δ, s_δ y n_δ tales que aunque $|t_\delta - s_\delta| < \delta$, se tiene la desigualdad contraria $\|x_{n_\delta}(t_\delta) - x_{n_\delta}(s_\delta)\| \geq \varepsilon_0$.

Hemos de establecer lo segundo. Sigiendo la pista de la derivada, tomamos por ejemplo $\varepsilon_0 = 1$, y para cada $\delta > 0$ tomamos $n_\delta > \pi/\delta$ y los puntos $t_\delta = 0$ y $s_\delta = \pi/n_\delta$ de modo que efectivamente

$$\|x_{n_\delta}(t_\delta) - x_{n_\delta}(s_\delta)\| = \|\cos(0) - \cos(\pi)\| = 2 > 1 = \varepsilon_0, \text{ aunque } |t_\delta - s_\delta| = \frac{\pi}{n_\delta} < \delta.$$

$\boxed{1.2)}$ Falso. Repasamos el concepto de lipschitziana (en un intervalo compacto I):

afirmación: Existe $L > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| < L\,|x-y|$ para cualesquiera $x, y \in I$,

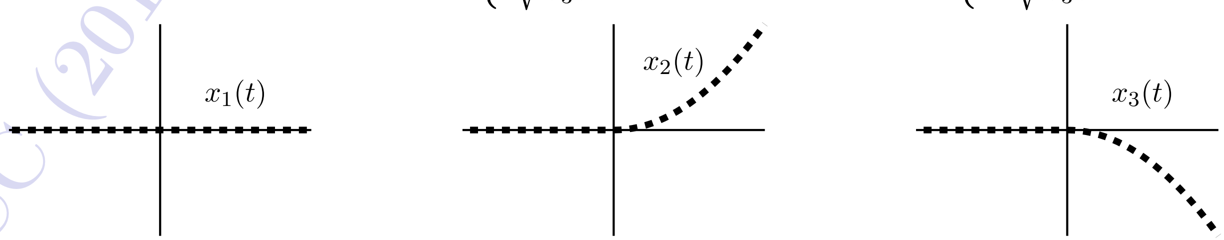
negación: Para todo $n \in \mathbb{N}$, encontramos $x_n, y_n \in I$ tales que $\|f(x_n) - f(y_n)\| > n\,\|x_n - y_n\|$.

En este caso, falla (debemos saberlo) la lipschitzianidad en cualquier entorno de $x = 0$. Para verlo, tomamos, para cada $n \in \mathbb{N}$ los siguientes puntos $x_n = 1/n^4$ e $y_n = 0$ y, efectivamente, obtenemos que

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \frac{1}{n^2} > \frac{1}{n^3} = n\,|x_n - y_n|, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\boxed{1.3)}$ Falso. Falla la unicidad. Como ya sabemos, el PVI que está detrás es $x' = f(x) = \sqrt[3]{x}$ con $x(0) = 0$, y la función f no es lipschitziana en torno a $x = 0$, por lo que no garantiza la unicidad. De hecho, conocemos infinitas soluciones, por ejemplo (obtenidas en clase por variables separadas):

$$x_1(t) \equiv 0, \qquad x_2(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0, \\ \sqrt{(\frac{2t}{3})^3} & t > 0, \end{cases} \qquad o \qquad x_3(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0, \\ -\sqrt{(\frac{2t}{3})^3} & t > 0, \end{cases}$$



$\boxed{1.4)}$ Falso. Si calculamos la solución del PVI:

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{x^2} = \int_0^t \frac{ds}{1-s} \Rightarrow \frac{-1}{x(t)} + 1 = -\ln(1-t) \Rightarrow x(t) = \frac{1}{1+\ln(1-t)},$$

observamos que está definida en el intervalo que contiene a $t = 0$ y no anula al denominador, que no es $(-\infty, 1)$ sino más pequeño: $(-\infty, 1 - \frac{1}{e})$.

$\boxed{1.5)}$ Falso. Veamos que la cuestión clave es la regularidad. Como f es continua en todo $\mathbb{R}^2$, lipschitziana respecto a x (porque es continua y lineal a trozos) y por definición es sublineal, tenemos existencia y unicidad de soluciones definidas en todo $\mathbb{R}$, sean cuales sean las condiciones iniciales en $\mathbb{R}^2$. Así que, en principio, todo es cierto pero en $C^1(\mathbb{R})$, pero como el valor absoluto no es derivable, sospechamos que puede ser falso (notemos que no basta con decir esto, pues si el PVI fuese $x' = |x|$ con $x(0) = 1$, tendríamos las mismas sospechas, ¡pero la afirmación será cierta!). Vamos a ir viendo cosas:

-La solución es siempre estrictamente creciente, porque $f(t, x) = e^t + |x| > 0$.

-Por lo anterior, y dado que en $t = 0$ es positiva, $x(t)$ es positiva cuando $t \geq 0$.

-Los problemas de regularidad del valor absoluto pueden llegar solo si $x(t_0) = 0$ en algún punto t_0, lo que, según lo deducido, no ocurre si $t \geq 0$ pero sí podría ocurrir en algún $t_0 < 0$. Vamos a confirmar este hecho, ya que "mientras la solución sea positiva" cumple $x'(t) = x(t) + e^t$ que es lineal y sabemos resolverla fácilmente (coeficientes indeterminados):

$$(\text{mientras } x(t) \geq 0 \ \Rightarrow) \quad x' = x + e^t \Rightarrow x(t) = x_p(t) + x_h(t) = (1+t)e^t,$$

y confirmamos que, efectivamente, $x(-1) = 0$. Como hemos deducido que x es estrictamente creciente, entonces $x(t) < 0$ para $t < -1$ y en este trozo cumpliría $x' = e^t - x$ (también podríamos resolver esta lineal y ver si los dos trozos pegan de forma C^∞ o no, pero veamos que no hace falta). Entonces, podemos deducir

$$x'(t) = \begin{cases} e^t - x(t), & t < -1, \\ e^t + x(t), & t \geq -1, \end{cases} \Rightarrow x''(t) = \begin{cases} e^t - x'(t), & t < -1, \\ e^t + x'(t), & t \geq -1, \end{cases} = \begin{cases} x(t), & t < -1, \\ 2e^t + x(t), & t \geq -1, \end{cases}$$

por lo que concluimos que ni siquiera es C^2, ya que los límites laterales no coinciden:

$$\lim_{t\to -1^-} x''(t) = x(-1) = 0, \qquad \lim_{t \to -1^+} x''(t) = 2e^{-1} + x(-1) = \frac{2}{e} \neq 0.$$

2. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ se considera la ecuación

$$x'' + 2\alpha x' + x^2 - x = 0.$$

Estudia las propiedades de estabilidad de todos los equilibrios en función del parámetro α.

Primero, como siempre, pasamos la ecuación a sistema:

$$x' := y \quad \to \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y \\ x - x^2 - 2\alpha y \end{pmatrix} := f(x,y)$$

y a continuación calculamos los equilibrios: en este caso claramente son $(0,0)$ y $(1,0)$ correspondientes respectivamente a las soluciones constantes $x \equiv 0$ y $x \equiv 1$. Primero vemos si el primer método de Lyapunov nos proporciona alguna información. Calculamos el jacobiano en los equilibrios:

$$Jac(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-2x & -2\alpha \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Jac(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2\alpha \end{pmatrix} \ y \ Jac(f)(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\alpha \end{pmatrix},$$

Y, de ahí, los valores propios y α. Primero en el equilibrio $(0,0)$:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -2\alpha - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\alpha\lambda - 1 \ \Rightarrow \ \lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2+1} \ \Rightarrow \ \mu := \max_{\lambda \in \sigma(A)} \{\Re e(\lambda)\} = -\alpha + \sqrt{\alpha^2+1},$$

que, usando que $\sqrt{\alpha^2+1} > \sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$ para cualquier valor de $\alpha \in \mathbb{R}$, produce $\mu > 0$ siempre, por lo que el $(0,0)$ es inestable siempre.

En el otro equilibrio $(1,0)$ tenemos:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2\alpha-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\alpha\lambda + 1 \;\Rightarrow\; \lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2-1} \;\Rightarrow\; \mu := \max_{\lambda\in\sigma(A)} \{\Re e(\lambda)\} = \alpha + \Re e(\sqrt{\alpha^2-1}),$$

En este caso, si $\boxed{\alpha < 0}$, entonces $\mu = -\alpha + (\text{algo}\geq 0) \geq -\alpha > 0$ y $x \equiv 1$ resulta ser inestable mientras que para el caso $\boxed{\alpha > 0}$, como $\Re e(\sqrt{\alpha^2-1}) < \Re e(\sqrt{\alpha^2}) = |\alpha|$, obtenemos $\mu < -\alpha + |\alpha| = 0$ y $x \equiv 1$ resulta ser asintóticamente estable.

Solo nos falta entonces analizar el equilibrio $(1,0)$ en el caso $\boxed{\alpha = 0}$, ya que $\mu = 0$ y el primer método no nos da información. Como estamos ante un **oscilador** con rozamiento y con potencial dado por $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$, veamos que la energía asociada nos vale como funcional de Lyapunov. Tomamos la energía asociada a una solución como siempre (cinética más potencial) y calculamos su derivada respecto a la ecuación:

$$\begin{aligned} V(x,y) &:= \frac{1}{2}\text{masa} \times \text{velocidad}^2 + \text{potencial} = \frac{y^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \\ \Rightarrow \dot{V}(x,y) &= \langle \nabla V, f\rangle = (x^2 - x)\,y + y\,(x - x^2 - 2\alpha y) \overset{\alpha=0}{\equiv} 0. \end{aligned}$$

Como $\dot{V} = 0$, para que sea un funcional de Lyapunov adecuado, solo nos falta ver que tiene un mínimo local en $(1,0)$, lo cual es fácil, simplemente calculando su hessiana en el punto $(1,0)$:

$$Hess(E)(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ definida positiva } \Rightarrow E \text{ tiene un mínimo local en } (1,0),$$

Por lo tanto, para $\alpha = 0$, $(1,0)$ es estable pero no asintóticamente estable. Resumiendo:

	$\alpha < 0$	$\alpha = 0$	$\alpha > 0$
equilibrio $x \equiv 1$	inestable	estable, no atractor	asintóticamente estable
equilibrio $x \equiv 0$	inestable		

3. Para cada $\beta \in \mathbb{R}$, sean $x(t;\beta)$ e $y(t;\beta)$ las soluciones respectivas de

$$\begin{cases} x'(t) = 2(1+\beta)x - 4\beta - x^2, \\ x(0) = (1+\beta), \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} y'(t) = 2(1+\beta)y - 4\beta - y^2, \\ y(0) = (1-\beta). \end{cases}$$

3.1) Demuestra que $x(t;\beta)$ está definida en $\mathbb{R}$ para todo $\beta \in \mathbb{R}$.

3.2) Prueba que, si $\beta > 1$, entonces $y(t;\beta)$ está definida para todo $t \leq 0$ y cumple $y(t;\beta) \leq x(t;\beta)$ para todo $t \leq 0$.

3.3) Prueba que para cada $-\infty < A < B < \frac{1}{2}$, existe $\delta > 0$ tal que si $|\beta - 1| < \delta$ entonces $[A,B]$ está contenido en el intervalo maximal de definición de $y(t;\beta)$.

$\boxed{3.1)}$ Como la EDO es la misma, y dada por $f(t,x;\beta) = 2(1+\beta)x - 4\beta - x^2$ que es polinómica, tenemos garantizada existencia y unicidad de solución. Veamos las soluciones constantes, por si fuesen de ayuda:

$$x^2 - 2(1+\beta)x + 4\beta = 0 \Leftrightarrow x = (1+\beta) \pm \sqrt{(1+\beta)^2 - 4\beta} = (1+\beta) \pm \sqrt{(1-\beta)^2} = (1+\beta) \pm |1-\beta|,$$

lo que produce dos equilibrios $x \equiv 2$ y $x \equiv 2\beta$. Ahora la respuesta a 3.1) es trivial, puesto que

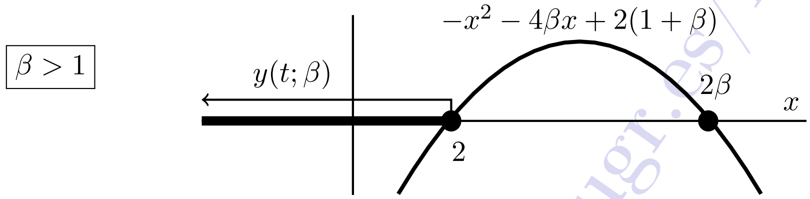
$$x(0;\beta) = 1 + \beta = \frac{2+2\beta}{2} = \text{ la media entre los dos equilibrios.}$$

Por lo tanto, para $\beta \neq 1$, x no coincide con ninguno de los dos equilibrios y la unicidad nos garantiza que $x(t;\beta)$ no puede tocarlos; como inicialmente está en medio de ambos, pues permanecerá para siempre, pasado y futuro, entre ambas soluciones, no pudiendo explotar, por lo que estará definida en $\mathbb{R}$, ya que el dominio de la ecuación no tiene frontera. El caso $\beta = 1$ es, si cabe, más sencillo aún, pues en este caso límite $x(t;1)$ coincide con el equilibrio (doble, en este caso) que es constantemente 2 y está definido en $\mathbb{R}$.

$\boxed{3.2)}$ Cuando $\beta > 1$, tenemos que:

$$y(0;\beta) = 1 - \beta < 2 < 2\beta,$$

es decir, está por debajo del equilibrio 2 (y del otro también), por lo que de nuevo el argumento de unicidad nos dice que se quedará siempre (en su intervalo maximal) por debajo de 2, y como $f(t, y;\beta) < 0$ cuando



$y < 2$ (ver dibujo), entonces $y(t;\beta)$ será estrictamente decreciente. Juntando todo esto, tenemos

$$2 > y(t;\beta) > y(0;\beta) \text{ para } t \leq 0$$

no pudiendo explotar, por lo que estará definida en $(-\infty, 0]$ al menos.
La desigualdad es consecuencia, o bien del teorema de comparación, o bien de la unicidad. Aquí usamos la segunda: como en $t = 0$ sí se cumple: $y(0;\beta) = 1-\beta < 1+\beta = x(0;\beta)$, y dos soluciones distintas no pueden cortarse (por unicidad) entonces han de permanecer una bajo la otra en todos los puntos en que existan ambas. En este caso, como x existe en todo $\mathbb{R}$, la desigualdad es cierta permanecerá cierta para $t \leq 0$, que es el intervalo en que acabamos de probar que sí existe y.

$\boxed{3.3)}$ En esencia hemos de aplicar resultados de continuidad respecto a parámetros, en este caso, en el punto $\beta = 1$. Concretamente, sabemos que dado cualquier compacto $[A, B]$ contenido en el intervalo maximal de definición de $y(t;1)$, las soluciones $y(t;\beta)$ están definidas en ese compacto para β suficientemente cercano a 1 (y además convergen uniformemente en ese compacto a $y(t;1)$, aunque esto no nos lo han preguntado). Por lo tanto, lo único que hay que comprobar es que el intervalo maximal de $y(t;1)$ es $(-\infty, \frac{1}{2})$, o uno más grande. El apartado anterior no basta, pues solo nos dice que $y(t;1)$ está definida para $t \leq 0$, y necesitamos llegar hasta $t < 1/2$. Veámoslo calculando explícitamente $y(t;1)$, esto es, resolviendo por variables separadas su PVI:

$$\begin{cases} y'(t) = 4y - 4 - y^2 = -(y-2)^2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{y(0)}^{y(t)} \frac{-dy}{(y-2)^2} = \int_0^t ds \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y(t)-2} - \frac{1}{0-2} = t - 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{4t}{2t-1},$$

que, al estar definida en $t = 0$ y anular el denominador en $t = 1/2$, está definida en $(-\infty, \frac{1}{2})$, tal y como queríamos demostrar.

4. Sea $(x(t;\alpha), y(t;\alpha))$ la solución maximal del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = -y^2 - \alpha x, & x(0) = 1 - \alpha \\ y' = xy - \alpha y, & y(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

4.1) Demuestra que $(x(t;\alpha), y(t;\alpha))$ está definida hasta ∞, cualquiera que sea $\alpha \in \mathbb{R}$.
(Sugerencia: estudia la función $\varphi(t) = x^2(t) + y^2(t)$, con $(x(t), y(t))$ solución de (1)).

4.2) Encuentra $(x(t;0), y(t;0))$ y determina, si es posible, $\frac{\partial x}{\partial \alpha}(t;0)$ indicando su intervalo de definición.

$\boxed{4.1)}$ Seguimos la sugerencia, obteniendo:

$$\varphi'(t) = 2x'(t)x(t) + 2y'(t)y(t) = 2x(-y^2 - \alpha x) + 2y(xy - \alpha y) = -2\alpha(x^2 + y^2) = -2\alpha\varphi(t).$$

Resolvemos esta ecuación con la condición inicial $\varphi(0) = x^2(0) + y^2(0) = (1 + \alpha)^2$, obtenemos:

$$\varphi(t) = (1 + \alpha)^2 e^{-2\alpha t} \;\Rightarrow\; \|(x(t), y(t))\|^2 = \varphi(t) \text{ no explota en tiempo finito,}$$

por lo tanto, o bien la solución existe en todo $\mathbb{R}$, o bien toca la frontera del dominio de la ecuación; pero como este dominio es $\mathbb{R}^3$ (por ser $f_\alpha(t, x, y) = (-y^2 - \alpha x, xy - \alpha y)$ polinónica en todas sus variables), este segundo supuesto no puede ocurrir, por lo que la solución existe en todo $\mathbb{R}$ como queríamos probar.

$\boxed{4.2)}$ Para calcular $(x(t;0), y(t;0))$, vemos qué PVI cumple

$$\begin{cases} x' = -y^2, & x(0) = 1 \\ y' = xy, & y(0) = 0. \end{cases}$$

y simplemente notamos que las condiciones iniciales corresponden a un equilibrio, por lo tanto, sin hacer ni una cuenta, $(x(t;0), y(t;0)) \equiv (1, 0)$. Por otro lado, como hemos indicado, dada la regularidad de f, es posible aplicar el teorema de derivación respecto de parámetros y condiciones iniciales; sabemos pues que $z(t) := \frac{\partial x}{\partial \alpha}(t;\alpha)$ y $w(t) := \frac{\partial y}{\partial \alpha}(t;\alpha)$ cumplen

$$\begin{cases} z' = -2y(t;\alpha)\, w - x(t;\alpha) - \alpha z, & z(0) = -1 \\ w' = z\, y(t;\alpha) + x(t;\alpha)w - y(t;\alpha) - \alpha w, & w(0) = 0. \end{cases}$$

y por lo tanto, en $\alpha = 0$, queda

$$\begin{cases} z' = w - 1, & z(0) = -1 \\ w' = w, & w(0) = 0. \end{cases}$$

Resolvemos primero en w, que está desacoplada, y obtenemos $w(t) = 0e^t = 0$, de donde, la ecuación para z resulta también trivial: $z' = -1$, $z(t) = -1 - t$, que es la pregunta pedida:

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha}(t;\alpha) = -1 - t$$

y esté definida en $\mathbb{R}$ por ser el intervalo en que está definida $x(t;0)$.