Universidad de Granada
Dept. Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias

Control 2 y ev. única final
Curso 2019/20
10-ene-2020

ECUACIONES DIFERENCIALES II
3º.A Y 3º.B
GRADO EN MATEMÁTICAS

1. Resuelve las siguientes cuestiones:

1.a) En cada una de las siguientes ecuaciones, determina el dominio o dominios en que el PVI asociado tiene solución y cuándo la solución maximal es única.

1.a.I) $x' = \dfrac{\ln(t)}{x}$.

1.a.II) $x' = g(t)\,h(x)$, con $g \in C(a,b)$ y $h(x) = \begin{cases} x^{1/3}, & x > 1, \\ \frac{1}{3}(x+2), & x \leq 1. \end{cases}$

1.b) Se considera la ecuación

$$x' = Ax + b(t), \tag{1}$$

con $A \in M_N(\mathbb{R})$ y $b \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$. Justifica si es verdadero o falso que:

1.b.I) Una solución $\varphi(t)$ de (1) es estable (respectivamente, asintóticamente estable, inestable) si, y solo si, el equilibrio $x \equiv 0$ es estable (respectivamente, asintóticamente estable, inestable) para la ecuación homogénea asociada a (1)

1.b.II) Si existe un vector no nulo $x_0 \in \mathbb{R}^N$ con $Ax_0 = -2\,x_0$, entonces la solución que cumple $x(0) = x_0$ es asintóticamente estable.

1.c) Pon un ejemplo de

1.c.I) EDO con exactamente dos equilibrios, uno inestable y otro asintóticamente estable.

1.c.II) EDO con exactamente dos equilibrios, uno inestable y otro estable pero no asintót. estable.

$\boxed{\text{1.a.I)}}$ Al haber un logaritmo de t, necesitamos $t > 0$ y pata que no se anule el denominador, $x \neq 0$. Por lo tanto en este caso hay dos posibles dominios $D_1 = (0,\infty) \times (0,\infty)$ y $D_2 = (0,\infty) \times (-\infty, 0)$. En ambos casos, la función resultante $f(t,x) = \ln(t)/x$ es C^1 en cualquiera de los dos, por lo que Cauchy-Peano nos garantiza la existencia y Picard-Lindelöff la unicidad.

$\boxed{\text{1.a.II)}}$ En este caso, por definición de g y h, el dominio de $f = g\,h$ es $D = (a,b) \times \mathbb{R}$. Por otro lado, como la función $h(t)$ es continua en $\mathbb{R}$, pues en el único punto dudoso, $x = 1$, sus límites laterales coinciden con $h(1) = 1$, entonces $f = g\,h$ es producto de funciones continuas, y Cauchy-Peano nos garantiza la existencia de solución en D. Pero además h es C^1, ya que

$$h'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & x > 1, \\ \frac{1}{3}, & x < 1. \end{cases} \qquad \Rightarrow \text{ por lo tanto } h'(1) = \tfrac{1}{3} \text{ y resulta } h \in C^1,$$

por lo que f es localmente lipschitziana respecto de x y Picard-Lindelöff nos da la unicidad.

$\boxed{\text{1.b.I)}}$ **Verdadero** Este es un resultado visto en clase. Para probarlo, basta hacer el cambio $y(t) = x(t) - \varphi(t)$, que produce todo lo necesario, ya que $y(t)$ resulta ser solución de la homogénea asociada:

$$y'(t) = x'(t) - \varphi'(t) = Ax(t) + b(t) - A\varphi(t) - b(t) = A(x(t) - \varphi(t)) = A\,y(t).$$

y simplemente podemos reescribir las definiciones:

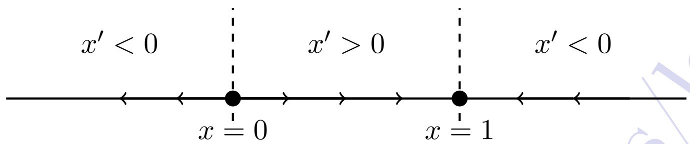
$$\varphi(t) \text{ es estable } \Leftrightarrow \left[\forall \epsilon,\ \exists \delta : si\ \| \overbrace{x(0) - \varphi(0)}^{=y(0)} \| < \delta \Rightarrow \| \overbrace{x(t) - \varphi(t)}^{=y(t)} \| \leq \epsilon \right] \Leftrightarrow y \equiv 0 \text{ es estable,}$$

$$\varphi(t) \text{ es atractor } \Leftrightarrow \left[\exists \delta_2 : si\ \| \overbrace{x(0) - \varphi(0)}^{=y(0)} \| < \delta_2 \Rightarrow \| \overbrace{x(t) - \varphi(t)}^{=y(t)} \| \xrightarrow{t \to \infty} 0 \right] \Leftrightarrow y \equiv 0 \text{ es atractor.}$$

Como asintóticamente estable = [estable + atractor] e inestabilidad es la falta de estabilidad, con estas dos equivalencias se corrobora el enunciado.

$\boxed{\text{1.b.II)}}$ **Falso**. Del enunciado, deducimos que $\lambda = -2$ es un valor propio, lo que puede llevar a pensar que esta solución (o, equivalentemente, cualquier otra) es asintóticamente estable, pero esto es erróneo, porque para que sea asintóticamente estable haría falta que TODOS los valores propios tuvieran parte real negativa. Así, basta dar como ejemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $x_0 = (0, 1)$, b se puede tomar 0, y sabemos que este sistema es inestable porque $\sigma(A) = \{1, -2\}$.

$\boxed{\text{1.c)}}$ A la hora de poner ejemplos, no hay ninguno mejor ni peor. Aquí usaremos los de clase. Para el apartado $\boxed{\text{1.c.I)}}$ tomamos el caso más simple; la logística: $x' = x(1 - x)$, una ecuación autónoma cuyo análisis de signos produce rápidamente el resultado buscado:



por lo que $x \equiv 0$ es inestable y $x \equiv 1$ asintóticamente estable.

Para el aparatado $\boxed{\text{1.c.II)}}$ hemos de irnos a 2-D. Por ejemplo, la ecuación de Lotka-Volterra de presa-depredador estudiada en clase, es un ejemplo. En este caso, y por ahorrarnos las cuentas, proponemos el del ejercicio 4 con $\varepsilon = 0$ de este mismo examen,

$$x'' + x^2 + x = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y \\ -x^2 - x \end{pmatrix} := f(x, y),$$

que tiene dos equilibrios $(0, 0)$ y $(1, 0)$. En la solución de 4 probaremos la parte más larga, que el $(0, 0)$ es estable y no asintóticamente estable. La parte restante, que el equilibrio $(1, 0)$ es inestable, es consecuencia del primer método de Lyapunov, pues:

$$Jac(f)(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma\Big(Jac(f)(1, 0)\Big) = \{1, -1\} \Rightarrow \max\{\Re e(\lambda)\} = 1 > 0,$$

por lo que $(1, 0)$ es inestable.

2. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, sea $x(t; x_0)$ la solución maximal del PVI:

$$PVI : \begin{cases} x'(t) = \ln(1 + t)\, g(x) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \qquad \text{siendo} \qquad g(x) := \begin{cases} x + 1, & x \leq -1, \\ x(1 - x^2), & |x| < 1, \\ x - 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

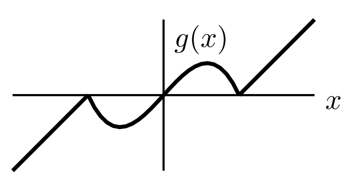
2.a) Justifica que para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, existe una única solución $x(t; x_0)$ e indica su intervalo maximal de definición.

2.b) Demuestra que, si $x(t; x_0)$ no es constante, entonces tiene un extremo local estricto en $t = 0$, indicando, en función de x_0, si es un máximo o un mínimo.

2.c) Calcula, justificando previamente su existencia, $\dfrac{\partial x}{\partial x_0}(t; 0)$.

2.d) Estudia la estabilidad de las soluciones constantes.

$\boxed{\text{2.a)}}$ Primero observamos que la función $g(x)$ se anula en 3 puntos $x = 0$ y $x = \pm 1$ y que es continua en todo $\mathbb{R}$, aunque no es derivable. Pero aunque g no sea C^1, en cada trozo es polinómica, por lo que es localmente lipschitziana a trozos, y sí resulta ser localmente lipschitziana (de hecho lo es globalmente). Por lo tanto llamando $f(t, x) = \ln(1+t) g(x)$ tenemos:



- f es continua en su dominio $D = (-1, \infty) \times \mathbb{R}$ por ser producto de continuas, y Cauchy-Peano nos garantiza la existencia de solución.

• f es localmente lipschitziana respecto a x en D, por serlo g, y Picard-Lindelöff nos garantiza la unicidad de solución del PVI.

• por último, bien porque se ha visto que g es globalmente lipschitziana (lo que implica sublineal) o viendo directamente que g es sublineal

$$|g(x)| \le \begin{cases} |x|+1, & x \le -1, \\ |x|, & |x|<1, \\ |x|+1, & x \ge 1. \end{cases}$$

es decir, $|g(x)| \le |x|+1$ en cualquier caso, obtenemos $|f(t,x)| \le |\ln(t+1)|(|x|+1)$, sublineal, y la solución está definida en $(-1,\infty)$, ya que no puede salirse del dominio de f.

$\boxed{\text{2.b)}}$ Como ya hemos dicho, hay 3 soluciones constantes de la EDO que se corresponden con los 3 ceros de g y, dado que tenemos unicidad del PVI, sabemos que ninguna otra solución puede tocar en ningún instante a ninguna de estas 3, por lo que,

$$\begin{cases} \text{si } \; x_0 < -1 & \Rightarrow \quad x(t;x_0) < -1 \quad \text{y} \quad g(x(t;x_0)) < 0, \\ \text{si } \; -1 < x_0 < 0 & \Rightarrow \quad -1 < x(t;x_0) < 0 \quad \text{y} \quad g(x(t;x_0)) < 0, \\ \text{si } \; 0 < x_0 < 1 & \Rightarrow \quad 0 < x(t;x_0) < 1 \quad \text{y} \quad g(x(t;x_0)) > 0, \\ \text{si } \; 1 < x_0 & \Rightarrow \quad 1 < x(t;x_0) \quad \text{y} \quad g(x(t;x_0)) > 0. \end{cases}$$

Así, haciendo un análisis del signo de f en torno a $t=0$, esto es, del signo de $x'(t)$, es fácil concluir:

$$\text{si } x_0 < 0,\; x \neq -1 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \text{si } t<0 \Rightarrow \overbrace{\ln(1+t)}^{<0}\overbrace{g(x(t;x_0))}^{<0} > 0 \\ \\ \text{si } t>0 \Rightarrow \overbrace{\ln(1+t)}^{>0}\overbrace{g(x(t;x_0))}^{<0} < 0 \end{array} \right] \Rightarrow x(t;x_0) \text{ máximo estricto en } t=0,$$

$$\text{si } x_0 > 0,\; x \neq 1 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \text{si } t<0 \Rightarrow \overbrace{\ln(1+t)}^{<0}\overbrace{g(x(t;x_0))}^{>0} < 0 \\ \\ \text{si } t>0 \Rightarrow \overbrace{\ln(1+t)}^{>0}\overbrace{g(x(t;x_0))}^{>0} > 0 \end{array} \right] \Rightarrow x(t;x_0) \text{ mínimo estricto en } t=0.$$

$\boxed{\text{2.c)}}$ Aquí obviamente estamos hablando de dependencia diferenciable respecto a las condiciones iniciales. Notamos dos cosas, la primera, que $x(t;0)$ es constantemente 0, pues corresponde con uno de los 3 ceros de g ya comentados; y la segunda, que **no se puede aplicar directamente el teorema de dependencia diferenciable**, puesto que f no es C^1 respecto de x. Para resolver este problema, como la derivabilidad es una cuestión local, podemos solventarlo rápidamente. Tomamos $g_2(x) = x(1-x^2)$, que coincide con g en torno a $x=0$, tiene sus mismos ceros, y además es C^∞. De este modo, todas las soluciones ya estudiadas que cumplen $|x(t;x_0)| < 1$, son comunes a los dos PVI's

$$PVI: \begin{cases} x'(t) = \ln(1+t)\, g(x) \\ \\ x(0) = x_0. \end{cases} \qquad \text{y } PVI_2: \begin{cases} x'(t) = \ln(1+t)\, g_2(x) \\ \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

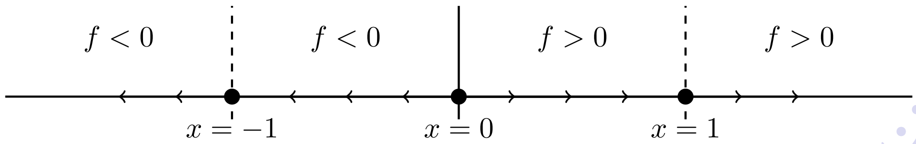
puesto que g y g_2 coinciden sobre ellas, pero en el segundo caso $f_2 = \ln(t+1)g_2(x)$ sí es C^1 respecto de x y sí se puede aplicar el teorema. Por lo tanto, nuestra solución es derivable respecto de x_0 en torno a $x_0 = 0$, y como además $\partial f/\partial x_0$ y $\partial f_2/\partial x_0$ coinciden en torno a $x(t;0)$, podemos calcularla como la solución de:

$$z'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_0}(t, x(t;0))z(t) = \frac{\partial f}{\partial x_0}(t,0)z(t) = \ln(1+t)(1-2x)\Big|_{x=0} z(t) = \ln(1+t)\, z(t), \quad z(0)=1.$$

Resolvemos este PVI lineal directamente y obtenemos la respuesta pedida

$$\frac{\partial x}{\partial x_0}(t;0) = z(t) = \exp\left\{ \int_0^t \ln(1+s)ds \right\} = \exp\Big\{(1+t)\ln(1+t) - t\Big\} = \frac{(1+t)^{(1+t)}}{e^t}, \qquad t > -1.$$

$\boxed{\text{2.d)}}$ Aunque no se trata de un sistema autónomo, como $\ln(1+t)$ es positivo para $t > 0$ y no influye en el signo de f, para estudiar la estabilidad podemos razonar como en el caso autónomo:



por lo que las tres soluciones constantes son inestables.

3. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, se considera el siguiente PVI: $\begin{cases} x'(t) = \dfrac{x^2(t)}{2 + \lambda^2\Big(|t| + x^2(t)\Big)}, \\ x(0) = 2. \end{cases}$

   3.a) Prueba que, para cada valor $\lambda \in \mathbb{R}^*$, existe una única solución maximal $x_\lambda(t)$ no negativa e indica su intervalo maximal de existencia.

   3.b) ¿Para qué valores de $t \in \mathbb{R}$ existe el límite: $\lim\limits_{\lambda \to 0} x_\lambda(t)$? Calcula, si es posible, $\lim\limits_{\lambda \to 0} x_\lambda(0)$.

$\boxed{\text{3.a)}}$ Como la función $f_\lambda(t, x) = \dfrac{x^2}{2 + \lambda^2\Big(|t| + x^2\Big)}$ es cociente de funciones **continuas en** $\mathbb{R}^2$ y el denominador no se anula nunca, Cauchy-Peano nos garantiza la existencia de solución. Por otro lado, también es cociente de funciones C^1 **respecto a** x (¡aunque el denominador NO lo sea respecto a t!), por lo que resulta localmente Lipschitziana respecto a x y Picard-Lindelöff nos garantiza la unicidad.

Para ver la no negatividad observamos primero que $f(t, 0) = 0$, por lo que $x \equiv 0$ es una solución de la EDO. Dado que tenemos unicidad del PVI asociado, nuestra solución y la trivial no pueden tocarse, por lo que $x_\lambda(t)$ conservará su signo en todo su intervalo maximal de existencia, y en $t = 0$ es positiva.

Por último, observamos que para $\lambda \neq 0$, la función f está acotada:

$$\left| \frac{x^2}{2 + \lambda^2\Big(|t| + x^2\Big)} \right| = \left| \frac{x^2}{x^2} \, \frac{1}{\frac{2+\lambda^2|t|}{x^2} + \lambda^2} \right| \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

y, por lo tanto, es sublineal, y la solución está definida en todo $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{3.b)}}$ Aquí observamos que lo relevante es la dependencia respecto del parámetro λ. Como la función f_λ, con respecto a λ también es cociente de continuas con denominador no nulo, podemos aplicar el teorema de dependencia continua respecto a parámetros, y deducir que

$$\lim_{\lambda \to 0} x_\lambda = x_0 \quad \text{uniformemente en compactos del dominio maximal de } x_0(t),$$

por lo que la convergencia puntual será sobre todo el dominio maximal de $x_0(t)$, que aún no conocemos. Vamos a calcular este dominio maximal, calculando $x_0(t)$, que es solución de $x'(t) = x^2/2$ con $x(0) = 2$:

$$\int_2^{x(t)} \frac{dx}{x^2} = \frac{t}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{x(t)} - \frac{-1}{2} = \frac{t}{2} \quad \Rightarrow \quad x_0(t) = \frac{2}{1-t},$$

de modo que la solución explota en $t = 1$; como el dominio maximal ha de contener a $t = 0$, deducimos que $x_0(t)$ está definida en $(-\infty, 1)$ y es en este conjunto donde se da la convergencia pedida cuando $\lambda \to 0$.

Por último, el límite pedido es, trivialmente, 2 (incluso sin calcular $x_0(0)$) puesto que en $t = 0$, todas las $x_\lambda(0)$ valen 2, como indica el PVI.

4. Para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$ se considera la ecuación

$$x'' - \varepsilon x' + x^2 + x = 0.$$

   Estudia las propiedades de estabilidad del equilibrio $x \equiv 0$ en función del parámetro ε.

Primero, como siempre, pasamos la ecuación a sistema:

$$x' := y \quad \to \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y \\ -x^2 - x + \varepsilon y \end{pmatrix} := f(x,y)$$

y a continuación vemos si el primer método de Lyapunov nos proporciona alguna información. Calculamos el jacobiano en el equilibrio $(0,0)$:

$$Jac(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2x-1 & \varepsilon \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A := Jac(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

Y, de ahí, los valores propios:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & \varepsilon - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \varepsilon\lambda + 1 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4}}{2}.$$

Por lo tanto, ya tenemos gran parte del ejercicio resuelto, ya que como: $\Re e(\sqrt{\varepsilon^2-4}) < \Re e(\sqrt{\varepsilon^2}) = |\varepsilon|$:

$$\mu := \max_{\lambda \in \sigma(A)} \{\Re e(\lambda)\} = \frac{\varepsilon + \Re e(\sqrt{\varepsilon^2 - 4})}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{si } \varepsilon > 0 \Rightarrow \quad \mu > 0, \text{ y } x \equiv 0 \text{ es inestable;} \\ \text{si } \varepsilon < 0 \Rightarrow \quad \mu < 0, \text{ y } x \equiv 0 \text{ es asintóticamente estable.} \end{cases}$$

Solo nos falta entonces analizar el caso $\varepsilon = 0$. Como estamos ante un **oscilador** con rozamiento y con potencial dado por $V(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ (ya que $V'(x) = x^2 + x$), veamos que la energía asociada nos vale como funcional de Lyapunov (¡aunque $V(x)$ NO es positivo!). Definimos la energía asociada a una solución como siempre (cinética más potencial) y calculamos su derivada respecto a la ecuación:

$$\begin{aligned} E(x,y) &:= \frac{1}{2}\text{masa} \times \text{velocidad}^2 + \text{potencial} = \frac{1}{2}y^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \\ \Rightarrow \dot{E}(x,y) &= \langle \nabla E, f \rangle = (x^2 + x)y + y(-x^2 - x + \varepsilon y) \overset{\varepsilon=0}{=} 0. \end{aligned}$$

Como $\dot{E} = 0$, para que sea un funcional de Lyapunov adecuado, solo nos falta ver que tiene un mínimo local en $(0,0)$, lo cual es fácil, simplemente calculando su hessiana:

$$Hess(E)(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ definida positiva } \Rightarrow E \text{ tiene un mínimo local en } (0,0),$$

Por lo tanto, para $\varepsilon = 0$, el origen es estable pero no asintóticamente estable.

4. Para cada $2\varepsilon \in \mathbb{R}$ se considera la ecuación

$$x'' - 2\varepsilon x' + x^2 + x = 0.$$

Estudia las propiedades de estabilidad del equilibrio $x \equiv 0$ en función del parámetro ε.

Primero, como siempre, pasamos la ecuación a sistema:

$$x' := y \quad \to \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y \\ -x^2 - x + 2\varepsilon y \end{pmatrix} := f(x,y)$$

y a continuación vemos si el primer método de Lyapunov nos proporciona alguna información. Calculamos el jacobiano en el equilibrio $(0,0)$:

$$Jac(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2x-1 & 2\varepsilon \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A := Jac(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\varepsilon \end{pmatrix},$$

Y, de ahí, los valores propios y μ:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2\varepsilon - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\varepsilon\lambda + 1 \;\Rightarrow\; \lambda = \varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \;\Rightarrow\; \mu := \max_{\lambda \in \sigma(A)} \{\Re e(\lambda)\} = \varepsilon + \Re e(\sqrt{\varepsilon^2 - 1}).$$

Por lo tanto, si $\boxed{\varepsilon > 0}$, entonces $\mu = \varepsilon + (\text{algo}{\geq}0) \geq \varepsilon > 0$ y $x \equiv 0$ resulta ser inestable mientras que para el caso $\boxed{\varepsilon < 0}$, como $\Re e(\sqrt{\varepsilon^2 - 1}) < \Re e(\sqrt{\varepsilon^2}) = |\varepsilon|$, obtenemos $\mu < \varepsilon + |\varepsilon| = 0$ y $x \equiv 0$ resulta ser asintóticamente estable.

Solo nos falta entonces analizar el caso $\boxed{\varepsilon = 0}$. Como estamos ante un **oscilador** con rozamiento y con potencial dado por $V(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ (ya que $V'(x) = x^2 + x$), veamos que la energía asociada nos vale como funcional de Lyapunov (¡aunque $V(x)$ NO es positivo!). Definimos la energía asociada a una solución como siempre (cinética más potencial) y calculamos su derivada respecto a la ecuación:

$$\begin{aligned} E(x, y) &:= \frac{1}{2}\text{masa} \times \text{velocidad}^2 + \text{potencial} = \frac{1}{2}y^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \\ \Rightarrow \dot{E}(x, y) &= \langle \nabla E, f \rangle = (x^2 + x)y + y(-x^2 - x + 2\varepsilon y) \overset{\varepsilon=0}{\equiv} 0. \end{aligned}$$

Como $\dot{E} = 0$, para que sea un funcional de Lyapunov adecuado, solo nos falta ver que tiene un mínimo local en $(0, 0)$, lo cual es fácil, simplemente calculando su hessiana:

$$Hess(E)(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ definida positiva } \Rightarrow E \text{ tiene un mínimo local en } (0, 0),$$

Por lo tanto, para $2\varepsilon = 0$, el origen es estable pero no asintóticamente estable.

5. Dada una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, considera las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$z'' - \text{traza}(A)z' + \det(A)z = 0. \tag{3}$$

5.a) Prueba que, si $(x(t), y(t))$ es una solución de (2), entonces tanto $x(t)$ como $y(t)$ verifican (3).

5.b) Demuestra, dando un contraejemplo, que el recíproco no es cierto, esto es, da una matriz A y una solución $z(t)$ de (3) que no sea ninguna componente de ninguna solución de (2).

5.c) Prueba que (2) es asintóticamente estable si, y sólo si, (3) es asintóticamente estable.

5.d) Prueba que si (2) es inestable entonces (3) también lo es, pero que el recíproco no es cierto.

La clave de todo el ejercicio está en los valores propios; veámoslo. Si pasamos (3) a su sistema equivalente, obtenemos:

$$z' := w \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\det(A) & \text{traza}(A) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} := B \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}, \tag{4}$$

y, como observamos, las matrices A y B comparten traza y determinante, y por lo tanto polinomio característico, valores propios y multiplicidades algebráicas (aunque no necesariamente las geométricas, que es lo que nos ayuda a buscar los contraejemplos de los apartados 5.b) y 5.d)). Pasamos a resolver el ejercicio.

$\boxed{\text{5.a)}}$ Como hemos de ver qué cumple la derivada segunda de x e y, partimos primero de la ecuación de x y la derivamos a ver qué sale:

$$x'' = ax' + by' = ax' + \overbrace{b(cx + dy)}^{y' = cx + dy} = ax' + bcx + \overbrace{d(x' - ax)}^{by = x' - ax} = (a + d)x' + (bc - ad)x = \text{traza}(A)x' - \det(A)x,$$

como nos pedían demostrar. Para y, la cosa es análoga:

$$y'' = cx' + dy' = \overbrace{c(ax+by)}^{x'=ax+by} + dy' = \overbrace{a(y'-dy)}^{cx=y'-dy} + bcy + dy' = (bc-ad)y + (a+d)y' = \text{traza}(A)y' - \det(A)y.$$

$\boxed{\text{5.b)}}$ El ejemplo más simple es $A = 0$, puesto que en este caso las soluciones respectivas de (2) y (3) son:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R} \qquad y \qquad z(t) = k_3 t + k_4 \quad k_3, k_4 \in \mathbb{R},$$

y obviamente la solución $z(t) = t$ no está entre las posibles $x(t)$ o $y(t)$, que son constantes. (Como adelantábamos, bastaría cualquier matriz con un valor propio doble y multiplicidad geométrica 2, una diagonal por ejemplo, ya que la ecuación (3) tendría el mismo valor propio doble pero con multiplicidad geométrica 1, lo que produce las soluciones diferentes al aparecer el factor t)

$\boxed{\text{5.c)}}$ Una vez hecho el análisis de valores propios anterior ($\sigma(A) = \sigma(B)$), la respuesta es obvia usando el teorema de clase que caracteriza la estabilidad de los sistemas lineales:

$$\text{(2) es asintót. estable} \Leftrightarrow \max_{\lambda\in\sigma(A)} \{\Re e(\lambda)\} < 0 \Leftrightarrow \max_{\lambda\in\sigma(B)} \{\Re e(\lambda)\} < 0 \Leftrightarrow \text{(3) es asintót. estable}$$

$\boxed{\text{5.d)}}$ Seguimos el mismo teorema sobre estabilidad en sistemas lineales; para la inestabilidad hay solo dos posibilidades (por estar en 2 dimensiones):

$$\text{(2) es inestable} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{o bien } \max\limits_{\lambda\in\sigma(A)} \{\Re e(\lambda)\} > 0, \\ \text{o bien } \sigma(A) = \{0,0\}, \text{ pero la multiplicidad geométrica de } \lambda = 0 \text{ es } 1, \end{cases}$$

- en el primer caso, como $\sigma(A) = \sigma(B)$: $\Rightarrow \max\limits_{\lambda\in\sigma(B)} \{\Re e(\lambda)\} > 0 \Rightarrow$ (3) inestable

- en el segundo caso traza$(A) = \det(A) = 0$, lo que produce $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ por lo que también $\lambda = 0$ es valor propio doble y con multiplicidad geométrica 1 $\Rightarrow$ (3) inestable.

Para negar el recíproco, y tras el análisis hecho, notamos que el valor propio $\lambda = 0$ doble es la clave, ya que produce o no estabilidad según su multiplicidad geométrica. Así que, de nuevo, si tomamos $A = 0$ obtenemos que (2) es estable, pero (3), como acabamos de ver, es inestable.

LISTA DE ERRORES MÁS ABUNDANTES

1. Si $x'(t_0)$ entonces x tiene un extremo en t_0.
   FALSO. $x(t) = t^3$ en $t_0 = 0$.

2. Si f está definida a trozos resulta continua en $\mathbb{R}$ y C^1 en cada trozo, entonces es localmente lipschitziana.
   FALSO. $f(x) = \sqrt{|x|}$ es continua en $\mathbb{R}$, es $C^1(0, \infty)$ y también en el otro trozo $C^1(-\infty, 0)$, pero no es lipschitziana en ningún entorno de $x = 0$.

   Es cierto cuando f es polinómica en cada trozo, o cuando es lipschitziana en cada trozo, o lo más parecido, cuando es C^1 en el cierre de cada trozo (no solo en el abierto).

3. La expresión $\dfrac{x^2}{2 + \lambda^2 x^2}$ es menor que 1.
   FALSO. Para $x = 9$ y $\lambda = 1/9$ resulta $\frac{81}{2+1} = 27$.

4. $|t|$ es C^1. No lo es, tiene un "pico" en $t = 0$.

5. Si $x' \geq 0$ y $x(t_0) > 0$ entonces $x > 0$ siempre.
   FALSO. $x(t) = t$ lo cumple y toma valores negativos. (Sería ciero solo a la derecha de t_0)

6. Decir "claramente", "obviamente", o "trivialmente" no siempre constituye una respuesta "completa" cuando se pide un un "razonamiento", una "prueba" o una "justificación".

CALIFICACIONES Notas obtenidas por los alumnos en este control y nota final por curso, tanto los de evaluación continua como los de evaluación única final:

DNI	Ej. 1 (% del ej.)	2 (% del ej.)	3 (% del ej.)	4 (% del ej.)	5 (% del ej.)	NOTA FINAL POR CURSO
.025.*		40	70	0	30	3,2
.036.*	60	25	40	40		3
.053.*	50	15	90	70		5,1
.066.*	50	0	25	65		3,3
.140.*	33	20	30	50	20	3,1
.149.*	50	0	25	40		3,2
.167.*		10	0		50	2,7
.228.*	50	25	40	60		5
.236.*	33	10	30	70		2,9
.369.*	50	25	95	0		5,1
.376.*	5	50	70	85		5,1
.378.*	15	0	40	20		1,5
.388.*	50	20	80	100		6
.389.*	33	0	40	60		5
.435.2	60	13	50	75		5
.435.8		25	75	75	0	3,3
.442.*	45	0	75	95		5,5
.446.*	50	0	100	40		5
.447.*	25	25	75	60		5
.501.*					30	0,6
.522.*						0
.556.*	40		50	40		2,1
.573.*	50	25	40	40		2,8
.579.*	60	0	50	40		3,5
.606.*	20	0	0	60	50	2,6
.622.*	50	75	70	70		6
.643.*						0
.646.*	34	25	75	40		5
.669.*	50			0	50	2,1
.690.*	17	0	50	100		2,5
.719.*	50		60	80	35	5,6
.745.*	60	15		60		2
.821.*	34	25	25	10	5	2
.830.*	84	25	90	100		7,4
.913.*	45	40	75	60		5,3
.920.*	50		60	80	25	6
.929.*	50		20	30	25	2,7
.939.*	40	0	50	40		2,9

El examen puede ser revisado el martes 28 de enero de 2020 a las 9:30h en el despacho del profesor. Se puede adelantar (no retrasar) la revisión si se justifica la necesidad y se confirma en persona con el profesor.

Granada, 22 de enero de 2020.