Universidad de Granada	**Control 1**	ECUACIONES DIFERENCIALES II
Dept. Matemática Aplicada		3º. B
Facultad de Ciencias	11-nov-2019	GRADO EN MATEMÁTICAS

1. Dada una sucesión de funciones continuas $x_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ y una sucesión de números $\{t_n\} \subset [0,1]$ cumpliendo $\lim_{n\to\infty} t_n = t^*$, demuestra los siguientes resultados:

   a) Si x_n converge uniformemente en $[0,1]$ a una función x, entonces $\lim_{n\to\infty} x(t_n) = x(t^*)$.

   b) El resultado anterior es falso si sustituimos la convergencia uniforme por puntual.

   c) Si x_n converge uniformemente en $[0,1]$ a una función x, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n(t_n) = x(t^*)$.

   d) El resultado anterior es falso si sustituimos la convergencia uniforme por puntual.

$\boxed{\text{1.a)}}$ Dado que t^* es arbitrario, lo que dice la afirmación es, por sucesiones, que x es una función continua en todo punto t^*; probémoslo. Dado $\varepsilon > 0$ gracias a la convergencia uniforme, tenemos que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n(t) - x(t)| \le \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \forall n \ge n_0, \quad \forall t \in [0,1].$$

Ahora, nos quedamos con el n_0 y como x_{n_0} es continua, existirá un $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_{n_0}(t_n) - x_{n_0}(t^*)| \le \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \forall n \ge m_0.$$

Combinando estos resultados, obtenemos

$$|x(t_n) - x(t^*)| \le |x(t_n) - x_{n_0}(t_n)| + |x_{n_0}(t_n) - x_{n_0}(t^*)| + |x_{n_0}(t^*) - x(t^*)| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad \forall n \ge m_0,$$

y (leamos lo que está en azul) hemos acabado.

$\boxed{\text{1.b)}}$ Para negar el resultado, basta dar un contraejemplo. Tomemos por ejemplo $x_n(t) = t^n$ que converge puntualmente a la función

$$x(t) = \begin{cases} 0, & si\ 0 \le t < 1, \\ 1, & si\ t = 1, \end{cases}$$

que, obviamente, no es continua en $t^* = 1$ y si tomamos $t_n = 1 - \frac{1}{n} \to 1$ se tiene $x(t_n) = 0 \to 0 \ne 1 = x(1)$.

$\boxed{\text{1.c)}}$ La idea es escribir $|x_n(t_n) - x(t^*)| \le |x_n(t_n) - x(t_n)| + |x(t_n) - x(t^*)|$ y combinar la convergencia uniforme para el primer término y la continuidad de x para el segundo. Para ello, dado $\varepsilon > 0$, gracias a la continuidad de x (es límite uniforme de funciones continuas), existe un $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$|x(t_n) - x(t^*)| \le \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \ge n_0,$$

y gracias a la convergencia uniforme, tenemos que existe un $m_0 \in \mathbb{N}$, que podemos tomar mayor que n_0 para que también se cumpla lo anterior, tal que

$$|x_n(t) - x(t)| \le \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \ge m_0, \quad \forall t \in [0,1],$$

Combinando ambos resultados, obtenemos

$$|x_n(t_n) - x(t^*)| \le |x_n(t_n) - x(t_n)| + |x(t_n) - x(t^*)| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \qquad \forall n \ge n_0,$$

y (leamos lo que está en rojo) hemos acabado.

$\boxed{\text{1.d)}}$ Para negar el resultado, basta dar un contraejemplo. Tomemos el mismo de antes: $x_n(t) = t^n$ que converge puntualmente a la función

$$x(t) = \begin{cases} 0, & si\ 0 \le t < 1, \\ 1, & si\ t = 1, \end{cases}$$

pero si tomamos $t_n = 1 - \frac{1}{n} \to 1$ se tiene $x_n(t_n) = (1 - \frac{1}{n})^n \to \frac{1}{e} \ne 1 = x(1)$.

CC (2019) Juanjo Nieto http://www.ugr.es/local/jjmnieto

> 2. Dado el siguiente problema de valores iniciales:
>
> $$\begin{cases} x'(t) = a\,x^3(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$
>
> *a*) Para $(t_0, x_0) = (0, 1)$ y para cada valor del del parámetro $a \in \mathbb{R}$, calcula el intervalo maximal.
>
> *b*) Para $(t_0, x_0) = (0, -1)$ y para cada valor del del parámetro $a \in \mathbb{R}$, calcula el intervalo maximal.
>
> *c*) Para $a = 1/2$ fijo, determina explícitamente el conjunto
>
> $$E_1 = \left\{(t, x_0) \in \mathbb{R}^2 \colon \text{la solución de la ecuación que cumple } x(0) = x_0 \text{ existe en el punto } t\right\}.$$
>
> *d*) Para $a = 1$ fijo, determina explícitamente el conjunto
>
> $$E_2 = \left\{(t, t_0) \in \mathbb{R}^2 \colon \text{la solución de la ecuación que cumple } x(t_0) = 2 \text{ existe en el punto } t\right\}.$$

Primero notamos que $f(t, x) = a\,x^3$ es $C^1(\mathbb{R}^2)$, por lo que existe una única solución del PVI para cada par $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$. Además $x(t) \equiv 0$ es solución de la ecuación, por lo que la de nuestro PVI no podrá tocarla (gracias a la unicidad, dos soluciones distintas no pueden tocarse), de modo que será o bien siempre positiva, o bien siempre negativa.

En este caso, calculamos entonces la solución del PVI (que nos sirve para los dos apartados).

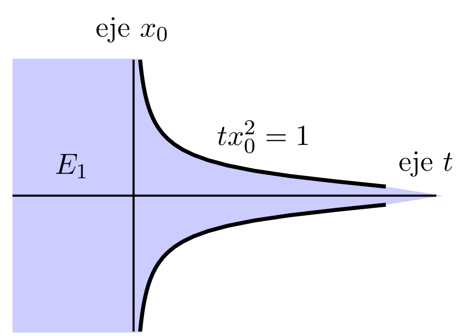
$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{x^3} = a(t - t_0) \Rightarrow \frac{-1}{2x^2(t)} - \frac{-1}{2x_0^2} = a(t - t_0) \Rightarrow x^2(t) = \frac{x_0^2}{1 - 2ax_0^2(t - t_0)},$$

donde el único requisito de existencia es que el denominador sea positivo estrictamente. Para despejar la solución, hay que tomar raíces y hay que elegir un signo (no valen los dos, porque tenemos unicidad!) y, como ya hemos argumentado que el signo de $x(t)$ no puede cambiar, este será el mismo que el de x_0; así:

$$x(t) = \operatorname{signo}(x_0)\frac{|x_0|}{\sqrt{1 - 2ax_0^2(t - t_0)}} = \frac{x_0}{\sqrt{1 - 2ax_0^2(t - t_0)}}.$$

Por lo tanto, ya tenemos todo para resolver el ejercicio. Para $\boxed{\text{2.a)}}$, la solución es $x(t) = 1/\sqrt{1 - 2at}$ y para $\boxed{\text{2.b)}}$ la solución es $x(t) = -1/\sqrt{1 - 2at}$; en ambos casos el dominio maximal es el mismo y obviamente depende de a. Por lo tanto:

$$\text{el intervalo maximal es } \begin{cases}]-\infty, \frac{1}{2a}[& si \quad a > 0, \\ \mathbb{R} & si \quad a = 0, \\ ]\frac{1}{2a}, \infty[& si \quad a < 0. \end{cases}$$

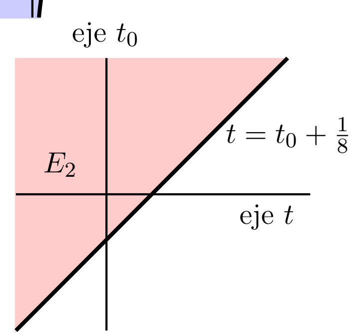


Para el $\boxed{\text{2.c)}}$, la solución general es

$$x(t; 0, x_0) = \frac{x_0}{\sqrt{1 - x_0^2 t}}$$

y la única condición necesaria es $1 - x_0^2 t > 0$. Por lo tanto:

$$E_1 = \left\{(t, x_0) \in \mathbb{R}^2 : t\,x_0^2 < 1\right\}.$$



Para el $\boxed{\text{2.d)}}$, la solución general es

$$x(t; 0, x_0) = \frac{2}{\sqrt{1 - 8(t - t_0)}}$$

y la única condición necesaria es $1 - 8(t - t_0) > 0$. Por lo tanto:

$$E_2 = \left\{(t, x_0) \in \mathbb{R}^2 : t < t_0 + 1/8\right\}.$$

CC (2019) Juanjo Nieto http://www.ugr.es/local/jjmnieto

3. Dados $k > 0$ y $\lambda > 0$, consideramos los siguientes problemas de valores iniciales:

$$(3.1)\begin{cases} x''(t) + k\,x'(t) + \operatorname{senh}(x(t)) = 0, \\ x(0) = 1. \\ x'(0) = 0. \end{cases} \qquad (3.2)\begin{cases} x''(t) + \lambda\,x'(t) + \big(x(t) + e^{x(t)}\big) = 0, \\ x(0) = 0. \\ x'(0) = 1. \end{cases}$$

a) Prueba que existe una única solución definida, al menos, en $[0, \infty[$.

b) ¿Qué podrías decir sobre la solución maximal de (3.1) en el caso $k < 0$?

c) ¿Qué podrías decir sobre la solución maximal de (3.2) en el caso $\lambda < 0$?

$\boxed{\text{3.a)}}$ Antes que nada, notamos que estamos ante **sendos osciladores** con potenciales dados respectivamente por $V_1(x) = \cosh(x)$ y $V_2(x) = \frac{x^2}{2} + e^x$ ya que

$$V_1'(x) = \operatorname{senh}(x), \qquad y \qquad V_2'(x) = x + e^x,$$

por lo que la energía asociada nos puede ayudar bastante. Para aplicar los resultados de clase, como siempre, pasamos las EDOs a sistema: $y(t) = x'(t)$ y:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = f_i(t, x(t), y(t)) \quad con \quad f_1(t,x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -k\,y - \operatorname{senh}(x) \end{pmatrix}, \quad y \quad f_2(t,x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -\lambda\,y - x - e^x \end{pmatrix}.$$

Como ambas f_i son $C^1(\mathbb{R}^3)$, aplicando Picard-Lindelöt, tenemos garantizada la existencia y unicidad (local) de solución, sea cual sea la condición inicial. Para estudiar el intervalo maximal, definimos la energía asociada a una solución como siempre (cinética más potencial) y calculamos su derivada:

$$E_1(t) := \frac{1}{2}\text{masa} \times \text{velocidad}^2 + V_1(x(t)) = \frac{1}{2}y^2(t) + \cosh(x(t)) \quad \Rightarrow \quad E_1'(t) = -ky^2(t),$$

$$E_2(t) := \frac{1}{2}\text{masa} \times \text{velocidad}^2 + V_2(x(t)) = \frac{1}{2}y^2(t) + \frac{x^2(t)}{2} + e^{x(t)} \quad \Rightarrow \quad E_2'(t) = -\lambda y^2(t),$$

Por lo tanto, ambos E_i son positivos, por ser suma de funciones positivas, y decrecientes, puesto que $E_i' \leq 0$. Deducimos entonces que

$$0 \leq \frac{1}{2}y^2(t) + V_i(x(t)) \leq E_i(0), \qquad \forall t \geq 0.$$

Como $E_1(0) = \cosh(0)$ y $E_2(0) = \frac{3}{2}$, deducimos, primero para las soluciones de (3.1) que para todo $t \geq 0$,

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq y^2(t) \leq 2\cosh(1) \\ 0 \leq \cosh(x(t)) \leq \cosh(1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |y(t)| \leq \sqrt{2\cosh(1)} \\ |x(t)| \leq 1 \end{array}\right\} \qquad \forall t \geq 0$$

y para las de (3.2) deducimos, que para todo $t \geq 0$, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq y^2(t) \leq 3/2 \\ 0 \leq x^2(t) + e^{x(t)} \leq 3/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |y(t)| \leq \sqrt{3/2} \\ |x(t)| \leq 1/\sqrt{2} \end{array}\right\} \qquad \forall t \geq 0$$

y como la solución maximal no puede explotar en $t \geq 0$, aplicando a los teoremas de prolongación tenemos $\omega = \infty$, esto es, ha de estar definida en $[0, \infty[$.

$\boxed{\text{3.b)}}$ y $\boxed{\text{3.c)}}$ En los casos $k < 0$ y λ los modelos dejan de tener sentido físico (sería un "anti rozamiento" que favorece el movimiento) pero podemos razonar análogamente. De hecho, la única diferencia es que ahora la energía sería creciente ya que, en este caso, $E_1'(t) = -ky^2(t) \geq 0$ y $E_2'(t) = -\lambda y^2(t) \geq 0$, por lo que todo lo obtenido hacia el futuro, ahora se obtiene hacia el pasado, esto es

$$|x(t)|, |y(t)| \;\; \text{acotadas} \;\; \forall t \leq 0,$$

y por lo tanto, la solución maximal estaría definida, al menos en $]-\infty, 0]$.

CC (2019) Juanjo Nieto http://www.ugr.es/local/jjmnieto

4. Dados $a > 0$ y $b > 0$, se consideran los siguientes problemas de valores iniciales:

$$(4.1)\begin{cases} x'(t) = \dfrac{x^2(t)}{a+|t|+x^2(t)}, \\ x(0) = 1. \end{cases} \qquad (4.2)\begin{cases} x'(t) = \dfrac{x^2(t)}{b+2e^{|t|}+x^4(t)}, \\ x(0) = b. \end{cases}$$

a) Prueba que, en ambos casos, existe una única solución maximal no negativa.

b) Prueba que la solución de (4.1) está definida, al menos en el intervalo $]-\infty, a[$.

c) Prueba que la solución de (4.2) está definida, al menos en el intervalo $]-\infty, 1[$.

$\boxed{\text{4.a)}}$ En ambos casos $f_1(t,x) = \frac{x^2}{a+|t|+x^2}$ y $f_2(t,x) = \frac{x^2(t)}{b+2e^{|t|}+x^4(t)}$ son **continuas en** $\mathbb{R}^2$, en sus dos variables, por lo que Cauchy-Peano nos garantiza la existencia de solución, y como también ambas son C^1 **respecto a** x (¡aunque no lo sean respecto a t!), son localmente Lipschitzianas respecto a x y Picard-Lindelöff nos garantiza la unicidad.

Para ver la no negatividad basta observar que $x(t) \equiv 0$ es una solución de ambas EDOs y, dado que tenemos unicidad del PVI asociado, las soluciones $x(t;0,1)$ y $0 = x(t;0,0)$ no pueden tocarse, por lo que $x(t;0,1)$ conserva su signo en todo su intervalo maximal de existencia, y en $t = 0$ es positiva en ambos casos.

$\boxed{\text{4.b)}}$ y $\boxed{\text{4.c)}}$ En realidad, en ambos casos vamos a ver que las soluciones maximales están definidas en todo $\mathbb{R}$. Para ello, simplemente veamos que f_1 y f_2 son acotadas y, por lo tanto, **sublineales**:

$$|f_1(t,x)| = \left|\frac{x^2}{a+|t|+x^2}\right| \le \left|\frac{x^2}{x^2}\right| = 1, \qquad |f_2(t,x)| = \left|\frac{x^2(t)}{b+2e^{|t|}+x^4(t)}\right| \le \left|\frac{x^2}{1+x^4}\right| \le 1,$$

por lo que, ya que las f_i está definida en $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, los teoremas de prolongación nos garantizan la existencia de solución en $t \in \mathbb{R}$.

CC (2019) Juanjo Nieto http://www.ugr.es/local/jjmnieto

CALIFICACIONES

Notas obtenidas por los alumnos en este control.

DNI	Sucesiones (% del ejercicio)	x' =potencia (% del ejercicio)	x'' =oscilador (% del ejercicio)	$x' = f$ sublineal (% del ejercicio)	NOTA (sobre 3)
.*.043	0 %	98 %	30 %	70 %	1,485
.*.095	0 %			10 %	0,075
.*.106	20 %	50 %	50 %	0 %	0,9
.*.121	10 %	25 %		80 %	0,8625
.*.193	0 %	20 %	25 %	45 %	0,675
.*.220		0 %	10 %	50 %	0,45
.*.224	10 %	90 %	20 %	50 %	1,275
.*.238	30 %	0 %	50 %	60 %	1,05
.*.268	0 %	45 %	50 %	50 %	1,0875
.*.357	0 %	0 %	0 %	0 %	0
.*.367	0 %				0
.*.430		100 %	10 %	50 %	1,2
.*.443		10 %	5 %		0,1125
.*.472	0 %	40 %	0 %		0,3
.*.493	70 %	2 %	40 %	50 %	1,215
.*.526	50 %	30 %	20 %	100 %	1,5
.*.544	5 %	90 %	20 %	70 %	1,3875
.*.549	0 %	25 %	20 %	50 %	0,7125
.*.557		0 %		30 %	0,225
.*.591	0 %	70 %	100 %	50 %	1,65
.*.614	0 %	10 %	25 %	50 %	0,6375
.*.622	30 %	50 %	30 %	10 %	0,9
.*.633	80 %	55 %	70 %	80 %	2,1375
.*.641	5 %	90 %	20 %	50 %	1,2375
.*.652	5 %				0,0375
.*.708	0 %	0 %	0 %	100 %	0,75
.*.710	0 %	50 %	70 %	60 %	1,35
.*.749	0 %	60 %	20 %	0 %	0,6
.*.764		50 %		60 %	0,825
.*.774		50 %	0 %	10 %	0,45
.*.789	0 %	55 %	30 %	70 %	1,1625
.*.794	5 %	35 %	30 %	85 %	1,1625
.*.892		20 %	25 %	50 %	0,7125
.*.902	25 %	0 %	0 %	40 %	0,4875
.*.917	0 %	20 %	0 %	0 %	0,15
.*.937	50 %	0 %	0 %	0 %	0,375
.*.999	25 %	50 %	0 %	10 %	0,6375

El examen puede ser revisado en tutorías durante el mes de noviembre.

CC (2019) Juanjo Nieto http://www.ugr.es/local/jjmnieto