Ecuaciones diferenciales II ($3^o B$)
(Guía de contenidos por sesión, hasta 19 de diciembre de 2019)

Juanjo Nieto

Curso 2019–20

Calendario primer cuatrimestre
[Azul, día de clase, Rojo, día festivo/no lectivo]

			11	12	13	14	15
	16	17	18	19	20	21	22
	23	24	25	26	27	28	29
	30						
Octu.		1	2	3	4	5	6
	7	8	9	10	11	12	13
	14	15	16	17	18	19	20
	21	22	23	24	25	26	27
	28	29	30	31			
Novi.					1	2	3
	4	5	6	7	8	9	10
	11	12	13	14	15	16	17
	18	19	20	21	22	23	24
	25	26	27	28	29	30	
Dici.							1
	2	3	4	5	6	7	8
	9	10	11	12	13	14	15
	16	17	18	19	20		

-Clases: (la asistencia a clase es OBLIGATORIA)
Lunes a jueves de 17:00 a 18:00

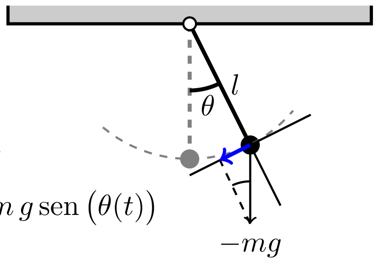
-Controles evaluación continua

Fecha	Contenido	Valor sobre 10
11y12-nov-19	hasta sesión 30	3 ptos
10-ene-20	todo	6 ptos

-Pruebas extraordinarias:
-20-nov-19: convocatoria especial (10 puntos).
-10-ene-20: prueba final única: **sólo** para los alumnos que lo hayan solicitado en plazo y les haya sido concedido (10 puntos).
-4-feb-20: convocatoria extraordinaria para alumnos que no hayan superado la asignatura (10 puntos).

Sesión 1: (11-sep-19)
-Presentación y estructura del curso

Sesión 2: (12-sep-19)
-Motivación; ecuación del péndulo:



$$m\,a = F$$
$$m\,l\,\theta''(t) = -m\,g\,\mathrm{sen}\big(\theta(t)\big)$$

-Primeras definiciones:

$$(PVI)\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & f : D \subseteq \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^N \\ x(t_0) = x_0, & (t_0, x_0) \in D. \end{cases}$$

-EDO, PVI, solución, dominio, velocidad...

Sesión 3: (16-sep-19)
-Ejemplos de
-soluciones que "explotan" (velocidad superlineal)
-no unicidad de soluciones (velocidad sublineal)
-**Teorema de Cauchy-Peano** (enunciado)
-Ecuación (equivalente) de Volterra

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

Sesión 4: (17-sep-19)
-Lema: (PVI) $\Leftrightarrow$ (EV)
-Proposición: existencia si $D = I \times \mathbb{R}^N$ y f acotada
-Demostración de Cauchy-Peano (Existencia):
-Construcción de $B_{1/2} \subset B \subset D$ y función meseta
-Extensión de f a $\tilde{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ y uso de proposición
-Solución por restricción a $B_{1/2}$

Sesión 5: (18-sep-19)
-Teorema de Bolzano-Weierstrass
-Acotación, continuidad y convergencia de funciones
-El límite uniforme de continuas es continuo
-Ejemplos y contraejemplos

Sesión 6: (19-sep-19)

-**Teorema de Ascoli-Arcelá**

-Sobre sucesiones parciales

-Argumento diagonal: $\{x_{\sigma_n(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$

Sesión 7: (23-sep-19)

-Demostración de la proposición

-Soluciones aproximadas: "retrasadas en tiempo"

-Se cumple el Teorema de Ascoli

-Paso al límite y existencia de solución

Sesión 8: (24-sep-19)

-Ejercicios de la relación 1

-Producto de equicontinuas no da equicontinuo

-Derivada acotada sí da equicontinuidad

Sesión 9: (25-sep-19)

-Ejercicios de la relación 1

-Ejemplos y contraejemplos varios

Sesión 10: (26-sep-19)

-Conceptos de unicidad (local $\forall(t_0,x_0) \Rightarrow$ global)

-Contractiva, lipschitziana y localmente lipschitziana

-Teorema del punto fijo de Banach

-Teorema de Picard-Lindelöf (Unicidad)

-Iterantes de Picard: $x_0(t) \equiv 0$, y

$$x_{n+1}(t) = T[x_n](t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds.$$

Sesión 11: (30-sep-19)

-Ejercicios

-Relaciones: lipschitziana *vs.* derivada acotada

-Criterios para el teorema de Picard-Lindelöf

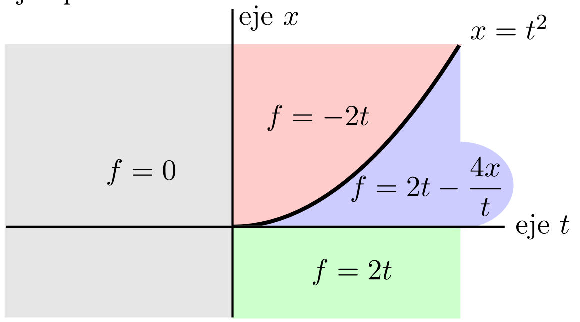
-$T^k : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ contractiva $\Rightarrow$ T tiene punto fijo

Sesión 12: (1-oct-19)

-Ejercicios

-Criterio de unicidad a la derecha (f decreciente)

-Ejemplo de Müler



Sesión 13: (2-oct-19)

-Prolongación de soluciones y yuxtaposición

-Solución maximal e intervalo maximal

-Condiciones para poder prolongar soluciones

-Esiste $\lim\limits_{t\to b} x(t) = x_b$ con $(b, x_b) \in D$

-Esiste $t_n \nearrow b$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x(t_n) = x_b$ con $(b, x_b) \in D$

Sesión 14: (3-oct-19)

-**Teorema de prolongación**

Si $x :]\alpha, \omega[\to \mathbb{R}^N$ maximal y $\omega < \infty$,

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{o bien} \quad \lim\limits_{t\to\omega} \|x(t)\| = \infty, \\ \text{o bien} \quad \exists t_n : \lim\limits_{n\to\infty} (t_n, x(t_n)) = (\omega, x_\omega) \in \partial D \end{cases}$$

Sesión 15: (7-oct-19)

-Ejercicios sobre prolongación

-Soluciones que explotan

-Soluciones que tocan la frontera

-Funciones que no resuelven EDOs en $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

-Soluciones "controladas" que existen siempre

Sesión 16: (8-oct-19)

-Corolarios sobre prolongación

-Soluciones maximales si $D =]a, b[\times \mathbb{R}^N$

-Soluciones maximales si f es sublineal

-Lema de Gronwall (caso fácil)

-Ejemplos varios (logística,...)

Sesión 17: (9-oct-19)

-Ejercicios

-Intervalos maximales

-Acotación usando soluciones constantes

Sesión 18: (10-oct-19)

-Ejercicios de la relación 2

-Continua + Lipschitziana a trozos da lipschitziana

-Iterantes de picard

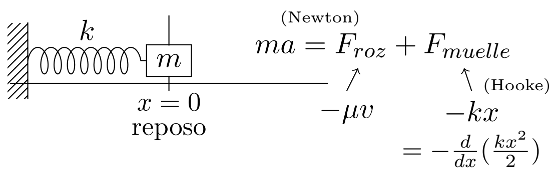
Sesión 19: (14-oct-19)

-Ejercicios de la relación 3

-Criterio de unicidad a la izquierda (f creciente)

-Todo sobre $x' = \sqrt[3]{x}$

-El oscilador armónico: potencial y energía



$$\begin{cases} \text{ecuación:} \quad mx'' = -\mu x' - kx; \\ \text{energía:} \quad E[x] = \frac{1}{2}m(x'(t))^2 + \dfrac{kx^2(t)}{2}. \end{cases}$$

Sesión 20: (15-oct-19)

-Ejercicios de la relación 3

-Intervalos maximales: energía conservada, soluciones constantes, soluciones que encierran bolas...

Sesión 21: (16-oct-19)

-Ejercicios de la relación 3

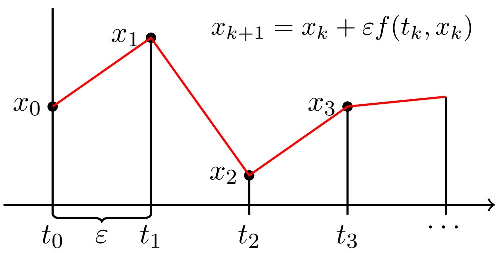
-Intervalos maximales: linealidad, sublinealidad, ejemplos 2-D, criterios varios...

Sesión 22: (17-oct-19)
-Ejercicios de la relación 3
-Comparación de soluciones, usando el Lema de Gronwall, usando $x^2(t) + y^2(t)$...

Sesión 23: (21-oct-19)
-Las soluciones “dependen” de t_0, x_0 y de f
-**Lema de Gronwall** (general)

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t \overbrace{\mu(s)}^{\mu \geq 0} y(s)ds,$$
$$\Rightarrow y(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t \lambda(s)\mu(s)e^{\int_s^t \mu(\tau)d\tau} ds.$$

-Soluciones ε-aproximadas
-(Poligonal de Euler)



Sesión 24: (22-oct-19)
-Desigualdad fundamental

$$\|\Pi_1(t) - \Pi_2(t)\| \leq \|\Pi_1(t_0) - \Pi_2(t_0)\| e^{L|t-t_0|} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{L}\left(e^{L|t-t_0|} - 1\right)$$

Sesión 25: (23-oct-19)
-Corolarios de la desigualdad fundamental:
-Teorema de Picard-Lindelöf
-Soluciones ε-aproximadas convergen a soluciones
-La poligonal de Euler converge a solución
-**Teoremas de dependencia continua**...
-...respecto de las condiciones iniciales:
-Versión perturbaciones: $x(t_0) = x_0 + x_{error}$
-Versión sucesiones: $(t_{0n}, x_{0n}) \to (t_0, x_0)$

Sesión 26: (24-oct-19)
-Dependencia continua respecto de la ecuación:
-Versión perturbaciones: $\|f - f_e\| <$ error
-Versión parámetros: $f(t, x, \lambda_n) \to f(t, x, \lambda)$
-Ejemplos
-Solución general de un PVI: $x(t; t_0, x_0)$ continua en E

Sesión 27: (28-oct-19)
-Conjunto E para $f(t, x) = x^2$. $x(t) = \frac{x_0}{1-x_0(t-t_0)}$ y
$E = \left\{(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R}^3 : x_0(t - t_0) < 1\right\}$
-Péndulo *vs.* Oscilador Armónico (cuando $|\Theta| << 1$)

$$\Theta(t) = \varepsilon \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\ t\right) + o(\varepsilon).$$

Sesión 28: (29-oct-19)
-El conjunto E es abierto

$$E = \left\{ (t; t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{2+N} : \begin{array}{l} (t_0, x_0) \in D, \\ \alpha(t_0, x_0) < t < \omega(t_0, x_0) \end{array} \right\}$$

Sesión 29: (30-oct-19)
-Ejemplos:
-Si $(t_n, x_n) \to (t_0, x_0)$ y $x(\cdot; t_0, x_0)$ def. en $[a, b]$
$\Rightarrow x(\cdot; t_n, x_n)$ definida en $[a, b]$ $\forall n \geq n_0$
-$x'' - 2\varepsilon x' + x = 0$ y $x'' - 2\varepsilon x' + x^3 = 0$

Sesión 30: (31-oct-19)
-Pepaso para control día 11 y 12.

Sesión 31: (4-nov-19)
-**Teorema de dependencia diferenciable**...
-Ecuación variacional asociada al PVI

$$A(t) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x(t; t_0, x_0))\right)_{i,j=1}^N \to \overset{\text{EV}}{\boxed{z' = A(t)z}}$$

Sesión 32: (5-nov-19)
-Cálculo de las derivadas de $x(t; t_0, x_0)$

- $\dfrac{\partial x}{\partial t} = f(t, x(t; t_0, x_0))$
- $\dfrac{\partial x}{\partial x_0} =$ matriz fundamental de $\boxed{\text{EV}}$ 1^{al}. en t_0
- $\dfrac{\partial x}{\partial t_0}$ resuelve $\boxed{\text{EV}}$ con dato inicial $-f(t_0, x_0)$

-Ejemplo: $x'' + a\,\mathrm{sen}(x), x(0) = c_0,\ x'(0) = v_0$.

Sesión 33: (6-nov-19)
-Derivación respecto de parámetros (T. Peano)
-Ejemplo: $x'' + \varepsilon x^3(t) = 0,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1$.

Sesión 34: (7-nov-19)
-Ejemplos y ejercicios
$x' + \varepsilon\,\mathrm{sen}(x),\ a \in \mathbb{R}$.
$x(t) = 1 + \lambda\,\mathrm{sen}(t) + \int_0^t (1 + x^2(s))^{-1} ds,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

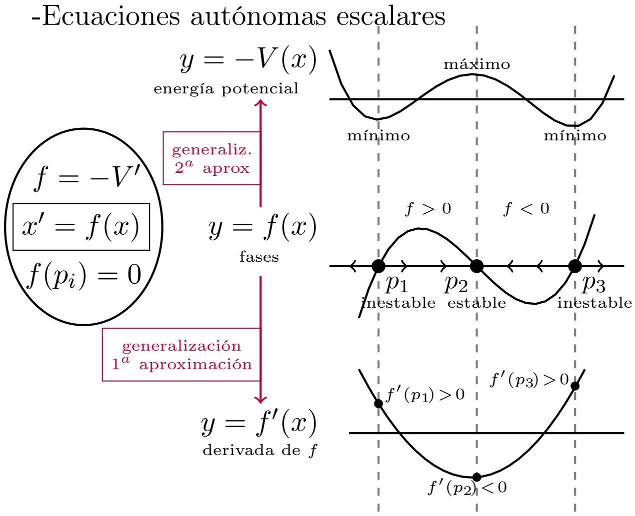
Sesiones 35 y 36: (11 y 12-nov-19)
-**Control 1**

Sesión 37: (13-nov-19)
-Corrección (y notas) del control

Sesiones 38 a 41: (18 al 21-nov-19)
- Ejercicios relación 4

Sesión 42: (25-nov-19)
-Ecuación logística en 1-D, Diagrama de fases
-Estabilidad, definiciones:
-Solución **estable**
-**Atractor** y **asintóticamente estable**

-Ecuaciones autónomas escalares



Sesión 43: (26-nov-19)

-**Caso lineal:** basta estudiar el cero en la homogénea

-Caso coeficientes constantes: $x' = Ax$

-¡Clave! relación con los valores propios de A

- $\lambda \in \mathbb{R}$: $Ax_0 = \lambda x_0 \Leftrightarrow x(t) = e^{\lambda t}x_0$ solución
- $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ y $z_0 = x_0 + iy_0$ valor propio:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = e^{at}(\cos(bt)x_0 - \operatorname{sen}(bt)y_0) \\ y(t) = e^{at}(\cos(bt)y_0 + \operatorname{sen}(bt)x_0) \end{cases} \text{soluciones}$$

-**Teorema de estabilidad para $x' = Ax + b(t)$**

Sesión 44: (27-nov-19)

-Diagramas de fases en 2D: casuística para $x' = Ax$

-*Phase plane plotter online*

Sesión 45: (28-nov-19)

-**Teorema de estabilidad para $x' = A(t)x + b(t)$**

-Estabilidad de ptos. de equilibrio para $x' = f(x)$

-**Teorema de la 1^a aproximación (Lyapunov)**

$$A := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right)_{i,j=1}^{N} \rightarrow \quad \boxed{\text{EV}} = \boxed{y' = Ay}$$

- Si $\boxed{\text{EV}}$ es A.E. $\Rightarrow x \equiv p$ es asint. estable
- Si $\boxed{\text{EV}}$ es inestable $\Rightarrow x \equiv p$ es inestable

-Ejemplos, ¿qué pasa si $\boxed{\text{EV}}$ es solo estable?

Sesión 46: (2-dic-19)

-Lotka-Volterra y oscilador sin rozamiento,...

$\Rightarrow$ necesidad de usar “una energía”

Sesión 47: (3-dic-19)

-Derivada de V respecto a f: $\dot{V}(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle$

-**Teorema: 2^a aprox. (funcional de Lyapunov)**

-$\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\begin{array}{l} p \text{ mínimo local estricto de } V \\ \dot{V}(x) \leq 0 \end{array}} \Rightarrow p$ estable

-$\boxed{\text{II}}$ $\boxed{\begin{array}{l} p \text{ mínimo local estricto de } V \\ \dot{V}(x) < 0 \text{ si } x \neq p \end{array}} \Rightarrow p$ asin. estab.

-$\boxed{\text{III}}$ $\boxed{\begin{array}{l} \exists\, p_n \to p : V(p_n) > V(p) \\ \dot{V}(x) > 0 \text{ si } x \neq p \end{array}} \Rightarrow p$ inestable

-**Interpretación geométrica**

-Teorema de Lagrange para $mx'' = F(x) = -\nabla V(x)$

Sesión 48: (4-dic-19)

-Ejercicios

-Estabilidad para soluciones explícitas

-Comportamiento de $\|e^{At}\|$: casuística

-Cambio a polares

Sesión 49: (5-dic-19)

-Ejercicios (sobre el T^a. 2^a aproximación)

-Estable pero no asintóticamente estable

-Criterio de Chetaev

-Ecuaciones autónomas escalares (ver sesión 42):

-Relación con signo$\big((x-p)f(x)\big)$

Sesión 50: (10-dic-19)

-Sistemas gradiente

-Ejercicios con 1^a aproximación

Sesión 51: (11-dic-19)

-Ejercicios: estabilidad jugando con parámetros

-Inestabilidad de $x = \pi$ del péndulo

Sesión 52: (12-dic-19)

-Ejercicios con parámetros

-Funcional de Lyapunov para Lotka-Volterra

-Funcionales de Lyapunov en variables separadas

Sesión 53: (16-dic-19)

-Ecuación de Lienard

-Ejercicios relación 5

Sesión 54: (17-dic-19)

-Ejercicios relación 5

Sesión 55: (18-dic-19)

-Demostraciones aplazadas

Sesión 56: (19-dic-19)

-Demostraciones aplazadas

-Ejercicios de exámenes

Fin de las clases

¡Feliz Navidad!

(10-ene-2020, en las G05 y G06)

-Control 2 de evaluación continua

-Prueba de evaluación única final

Notas y aclaraciones:

1. Una función $f : D \to \mathbb{R}^N$ NO es uniformemente continua $\Leftrightarrow$

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n, y_n \in D \textit{ con } \|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}$$

$$\textit{pero } \|f(x_n) - f(y_n)\| > \varepsilon_0.$$

2. Una función $f : D \to \mathbb{R}^N$ NO es lipschitziana $\Leftrightarrow$

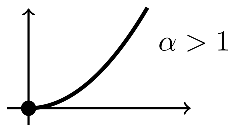
$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n, y_n \in D : \|f(x_n) - f(y_n)\| > n\|x_n - y_n\|.$$

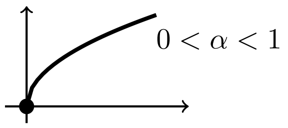
3. **Las potencias no enteras** x^α con $\alpha \notin \mathbb{Z}$ se definen, en principio, sobre los números positivos:

$$\begin{array}{ccc}]0,\infty[& \longrightarrow &]0,\infty[\\ x & \mapsto & x^\alpha := e^{\alpha \ln(x)}. \end{array}$$

Luego, en algunos casos, es usual extenderlas:

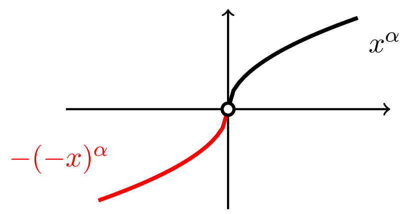
• Si $\alpha > 0$, se cumple $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$, por lo que se puede extender de forma continua a $x = 0$. **Ojo**, en este caso, el resultado será derivable en cero solo cuando $\alpha \geq 1$, ya que si $0 < \alpha < 1$, la función llega a 0 con pendiente infinita:





• Si $\alpha < 0$, hay una asíntota en $x = 0$, por lo que no tiene sentido extenderla.

• Extensión impar. En ocasiones (sobre todo para raíces impares) se "sobreentiende" la extensión a $\mathbb{R}^*$ de manera impar, esto es:



En el caso de raíces $\sqrt[n]{x}$ con n impar, en lugar de "sobreentender" la extensión impar descrita a todo $\mathbb{R}$, también podemos escribirla como sigue, para evitar "malentendidos":

$$\operatorname{sgn}(x)|x|^{\frac{1}{n}}, \quad \frac{x}{|x|}\sqrt[n]{|x|}, \quad x|x|^{\frac{1}{n}-1}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

que, además, es válida para cualquier otra potencia α positiva, y no solo para $\alpha = 1/n$.

4. E **es abierto**
(enlace pdf: ./edo2-Eabierto.pdf dentro del sitio web)

Ejercicios propuestos

1. [Difícil] Probar que la acotación uniforme no implica convergencia puntual de ninguna parcial.
Posible: $x_n(t) = \operatorname{sen}(nt)$ con $t \in (0,1)$.

2. [Fácil] Probar que la continuidad en todos los puntos no implica continuidad uniforme.
Posible: $x(t) = \operatorname{sen}(1/t)$ con $t \in (0,1)$

3. [Voluntario-CANCELADO (hecho en clase)] Probar que E es abierto

$$E = \{(t; t_0, x_0) : (t_0, x_0) \in D, \alpha(t_0, x_0) < t < \omega(t_0, x_0)\}$$

4. Ejercicios inacabados de la relación 4

5. Probar el teorema de estabilidad para $x' = Ax$

6. [Voluntario] Ejemplo de atractor inestable.

$$\text{Idea: (en polares)} \begin{cases} \theta'(t) = \operatorname{sen}^2(\frac{\theta(t)}{2}) \\ \rho'(t) = \text{logística} \end{cases}$$

Enlaces

• Web del profesor Ortega: www.ugr.es/~rortega/

• Webs para dibujar diagramas de fases $2D$ autónomos:

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

-De la Universidad de Arkansas (java):
https://aeb019.hosted.uark.edu/pplane.html
-De Pablo Rodríguez-Sánchez (geogebra):
https://www.geogebra.org/m/utcMvuUy
-Y muchos más desde un buscador:
https://www.google.com/search?q=phase+plotter

• Sobre atractores: https://ncase.me/attractors/es.html

• Encuesta de opinión del estudiantado sobre la actuación docente del profesorado.
Por favor, rellenadla antes del 5 de diciembre