$\boxed{1}$ Considera una función regular u que resuelve[1] el siguiente PVI:

$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0, & \text{para} \quad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = x^2, & \text{para} \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1.a) Considerando la función $v := u_{xxx}$, prueba que resuelve una ecuación del calor con cierta condición inicial y deduce[1] que $v \equiv 0$.

1.b) Usando el apartado anterior, deduce que u ha de ser de la forma $u(t,x) = A(t)x^2 + B(t)x + C(t)$, y determina las funciones $A(t)$, $B(t)$ y $C(t)$.

1.c) Compara la expresión obtenida en 2.b) con la deducida en clase[1] para probar que

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Solución. Para 1.a) usamos la ayuda para escribir $u = u_0 * G$ siendo $u_0(x) = x^2$ y $G(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\{\frac{-x^2}{4t}\}$. Por lo tanto

$$\frac{d^3 u}{dx^3} = \frac{d^3}{dx^3}(u_0 * G) = \Big(\frac{d^3}{dx^3} u_0\Big) * G = 0 * G = 0.$$

Respondemos al apartado 1.b). Como $u_{xxx} = 0$, entonces u es, con respecto a x, un polinomio de grado 2 a lo sumo (cuyos coeficientes pueden depender de t), esto es $u(t,x) = A(t)x^2 + B(t)x + C(t)$. Por lo tanto, usando el PVI e igualando coeficientes de $1, x, x^2$, obtenemos :

$$\left.\begin{array}{l} 0 = u_t - u_{xx} = A'(t)x^2 + B'(t)x + C'(t) - 2A(t) \\ x^2 = u(0,x) = A(0)x^2 + B(0)x + C(0). \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} A'(t) = 0, \ B'(t) = 0, \ C'(t) = 2A(t) \\ A(0) = 1, \ B(0) = 0, \ C(0) = 0. \end{array}\right\}$$

Por lo tanto $A(t) = 1$, $B(t) = 0$, $C(t) = 2t$ y $u(t,x) = x^2 + 2t$.

El apartado 1.c) es trivial usando la ayuda y el apartado anterior. Como tenemos dos expresiones de la solución: $u(t,x) = x^2 + 2t$ y $u = x^2 * G$, las igualamos:

$$x^2 + 2t = \int_{\mathbb{R}} (x-y)^2 \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\{\frac{-y^2}{4t}\} dy,$$

y evaluando simplemente en $x = 0$ y $t = 1/4$ en esta igualdad concluimos:

$$\frac{1}{2} = \int_{\mathbb{R}} y^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\{-y^2\} dy \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_{\mathbb{R}} y^2 \exp\{-y^2\} dy$$

como queríamos demostrar.

[1]Puedes usar que la expresión dada en clase es la única solución del PVI, aunque la condición inicial no sea acotada.

$\boxed{2}$ Dado el siguiente modelo de reacción difusión: $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u(1-u)$.

2.a) Determina los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los que la función $\phi(z) = \dfrac{1}{(1+e^{kz})^2}$ constituye un perfil de onda viajera para esta ecuación.

2.b) Para cada uno de los perfiles obtenidos, calcula la velocidad de la onda viajera asociada y prueba que une dos estados estacionarios (soluciones constantes) de la ecuación.

2.c) Las velocidades obtenidas ¿son mayores o iguales a 2? Teniendo en cuenta que es un modelo FKPP, explica la respuesta a la pregunta anterior.

$\boxed{\text{Solución}}$. 2.a) Para que ϕ sea el perfil de una onda viajera, ha de cumplirse que $u(t,x) = \phi(x-ct)$ sea solución de la ecuación para algún $c \in \mathbb{R}$. Sustituyendo, como en clase, obtenemos que ϕ ha de cumplir:

$$0 = u_t - u_{xx} - u(1-u) = -c\phi' - \phi'' - \phi(1-\phi),$$

por lo que calculamos estas derivadas:

$$\begin{aligned}
\phi'(z) &= (-2)\frac{e^{kz}k}{(1+e^{kz})^3} = -2k\frac{e^{kz}}{(1+e^{kz})^3}, \\
\phi''(z) &= (-2k)\frac{e^{kz}k(1+e^{kz})^3 - e^{kz}3(1+e^{kz})^2e^{kz}k}{(1+e^{kz})^6} = \frac{4k^2e^{2kz} - 2k^2e^{kz}}{(1+e^{kz})^4}.
\end{aligned}$$

Y ahora imponemos la condición anterior:

$$\begin{aligned}
0 &= -c\phi' - \phi'' - \phi(1-\phi) = 2kc\frac{e^{kz}}{(1+e^{kz})^3} - \frac{4k^2e^{2kz} - 2k^2e^{kz}}{(1+e^{kz})^4} - \frac{1}{(1+e^{kz})^2}\left(1 - \frac{1}{(1+e^{kz})^2}\right) \\
&= \frac{2kc\,e^{kz}(1+e^{kz}) - 4k^2e^{2kz} + 2k^2e^{kz} + (1-(1+e^{kz})^2)}{(1+e^{kz})^4} = \frac{\left[2kc + 2k^2 - 2\right]e^{kz} + \left[2kc - 4k^2 - 1\right]e^{2kz}}{(1+e^{kz})^4}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, dado que e^{kz} y e^{2kz} son funciones linealmente independientes (para $k \neq 0$, luego miramos este caso), para anularlo basta anular sus coeficientes:

$$\left.\begin{array}{l} 2kc + 2k^2 - 2 = 0 \\ 2kc - 4k^2 - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6k^2 - 1 = 0 \\ 6kc - 5 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (k,c) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,5) \quad \text{y} \quad (k,c) = \frac{-1}{\sqrt{6}}(1,5)$$

Así, la respuesta al apartado 2.a) es $k_+ = 1/\sqrt{6}$ y $k_- = -1/\sqrt{6}$ y los perfiles $\phi_\pm(z) = \dfrac{1}{(1+e^{k_\pm z})^2}$. El caso $k=0$ dejado aparte no produce un perfil, ya que daría $\phi(z) \equiv 1/4$ que no es solución.

Del apartado 2.b) ya tenemos las velocidades respectivas: $c_+ = 5/\sqrt{6}$ y $c_- = -5/\sqrt{6}$. Además los perfiles cumplen:

$$\lim_{z\to-\infty} \phi_-(z) = 0 = \lim_{z\to\infty} \phi_+(z) \quad y \quad \lim_{z\to\infty} \phi_-(z) = 1 = \lim_{z\to-\infty} \phi_+(z)$$

por lo que ambos perfiles conectan los dos estados estacionarios $u \equiv 0$ y $u \equiv 1$ pero en orden contrario, esto es, ϕ_- es creciente, parte de 0 y llega a 1, mientras que ϕ_+ es decreciente, parte de 1 y llega a 0.

El apartado 2.c) no precisa cuentas: tenemos $c_+ = 5/\sqrt{6} > 2$ pero $c_- = -5/\sqrt{6} < 0 < 2$ y, aunque *aparentemente* el teorema sobre FKPP niegue esta segunda posibilidad, tal contradicción es imposible porque, obviamente, los teoremas son ciertos. La explicación es simple, el teorema está enunciado para perfiles decrecientes (como ϕ_+) y, como sabemos, al invertir el crecimiento de un perfil, se invierte el signo de la velocidad (ejercicio propuesto en clase), por lo que el teorema para perfiles crecientes (como ϕ_-) diría que la velocidad ha de ser $c \leq -2$, que es precisamente lo que se cumple $c_- < -2$.

CALIFICACIONES

Notas obtenidas por los alumnos en el control 2, de 29 de mayo de 2019.

DNI	Nota control 2 (sobre 6)
.*.012	3
.*.016	3
.*.043	0
.*.054	1,5
.*.078	1,2
.*.107	1
.*.206	3,5
.*.226	1
.*.262	0
.*.277	0,2
.*.459	0
.*.506	3
.*.527	3
.*.552	2,5
.*.585	2
.*.628	2,5
.*.654	2
.*.666	2,5
.*.715	0,5
.*.763	0
.*.854	0,5
.*.879	0
.*.929	1,5
.*.985	0

El control puede ser revisado en tutorías.