Universidad de Granada	**Prueba de clase**	MODELOS MATEMÁTICOS II
Dept. Matemática Aplicada		Doble grado en
Facultad de Ciencias	3–Mayo–2017	Informática & Matemáticas

$\boxed{1}$ Dado el problema variacional:

$$\text{minimizar } \mathcal{F}[y] := \int_0^1 \Big(\frac{y'(x)^2 + y(x)^2}{2}\Big)dx \text{ en el conjunto } \mathcal{D} = \Big\{y \in C_0^1(0,1) : \int_0^1 y^2(x)dx = 1\Big\},$$

prueba que tiene solución, determinando el mínimo m y la función $\bar{y}$ sobre la cual lo alcanza.

$\boxed{\text{Solución}}$. En este caso, usaremos el teorema de caracterización variacional de valores y vectores propios. En este caso, con $P = 1/2$, $Q = -1/2$ y $S = 1$, sabemos que el problema de Sturm-Liouville asociado a este problema variacional es

$$y'' + (2\lambda - 1)y = 0, \ x \in [0,1], \qquad y(0) = y(1) = 0,$$

y que el mínimo se alcanza en la primera autofunción (normalizada) y es el primer autovalor (la existencia de un único mínimo, en este caso, también se puede deducir por convexidad y encontrando la única extremal). Resolvemos pues este problema de Sturm-Liouville. Como ha aparecido varias veces en clase, resumimos los pasos: no posee autovalores $(2\lambda - 1) \leq 0$; para $(2\lambda - 1) > 0$, la solución general es

$$y(x) = A\cos(\sqrt{2\lambda - 1}x) + B\operatorname{sen}(\sqrt{2\lambda - 1}x)$$

y, al imponer $y(0) = 0 = y(1)$ obtenemos $A = 0$ y $\operatorname{sen}(\sqrt{2\lambda - 1}) = 0$, de donde deducimos los autovalores y las autofunciones:

$$\lambda_n = \frac{1 + (n\pi)^2}{2}, \qquad y_n(x) = \pm B_n \operatorname{sen}(n\pi x), \qquad n \in \mathbb{N},$$

con B_n tal que y_n tenga norma 1. Por lo tanto, la respuesta es:

$$m = \lambda_1 = \frac{1 + \pi^2}{2}, \qquad \bar{y}(x) = \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\sqrt{\int_0^1 \operatorname{sen}^2(\pi x)}} = \sqrt{2}\operatorname{sen}(\pi x).$$

$\boxed{2}$ Calcula las extremales del siguiente problema de la viga con extremos apoyados, es decir,

$$\min \mathcal{B}[u] := \int_0^2 \Big((u''(x))^2 - (u'(x))^2 - 2xu(x)\Big)dx, \quad \textit{con} \quad u''(0) = u''(2) = u(2) = 0, \ u(0) = \frac{-1}{3}.$$

Ayuda: La ecuación de Euler-Lagrange asociada tiene una solución de la forma $K\,x^3$.

$\boxed{\text{Solución}}$. Como es el problema de la viga resuelto en clase con $M = N = 2$, sabemos (o rehacemos las cuentas) que la ecuación de Euler-Lagrange asociada es $u'''' + u'' = x$. Una solución particular viene dada en la ayuda: $u_p(x) = Kx^3$ (por si alguien no recordaba la técnica de los coeficientes indeterminados) que, sustituyendo, da $K = 1/6$. Como el polinomio característico de esta EDO es $\lambda^4 + \lambda^2 = \lambda^2(1 + \lambda^2)$, cuyas raíces son $\{0, 0, i - i\}$, la solución general es:

$$u(x) = \frac{1}{6}x^3 + A + Bx + C\operatorname{sen}(x) + D\cos(x).$$

Imponemos ahora las condiciones de contorno $u''(0) = 0 = u(2) = u''(2)$, y $u(0) = \frac{-1}{3}$:

$$\begin{cases} u''(0) = -D = 0, \\ u(0) = A + D = -1/3, \\ u''(2) = 2 - C\operatorname{sen}(2) - D\cos(2) = 0, \\ u(2) = 4/3 + A + 2B + C\operatorname{sen}(2) + D\cos(2) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = 0, \\ A = -1/3, \\ C = 2/\operatorname{sen}(2), \\ B = -3/2, \end{cases}$$

obteniendo una única extremal: $u(x) = \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{3x}{2} + \dfrac{2\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(2)}$.

$\boxed{3}$ Llamando $E(x)$ a la parte entera de x, calcula la serie de Fourier de la función $f(x) = x - E(x)$ (en un intervalo adecuado).

¿Coincide la serie calculada con la serie de senos de la función $g(x) = x$ en el intervalo $[0, 1]$?

$\boxed{\text{Solución}}$. Como la función es 1-periódica, hemos de elegir el intervalo $[0, 1]$, en el que la función es simplemente $f(x) = x - 0 = x$. Aplicamos directamente las definiciones:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T y(x)\,dx = 2\int_0^1 x\,dx = 1, \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx = 2\int_0^1 x\cos(2n\pi x)dx = 0.$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx = 2\int_0^1 x\,\mathrm{sen}(2n\pi x)dx = \left[\frac{-2x\cos(2n\pi x)}{2n\pi}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(2n\pi x)}{n\pi}dx = \frac{-1}{n\pi}.$$

Por lo tanto,

$$f(x) = (x - E(x)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) + b_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(2n\pi x)}{n},$$

y, como f es continua salvo en $\mathbb{Z}$, la convergencia (y la igualdad) es válida en todo $\mathbb{R}$ salvo los enteros.

La respuesta a la segunda pregunta es NO, aunque f y g sean iguales en el intervalo $[0, 1)$. Serían iguales si y solo si f fuese la extensión impar y 2-periódica de g a todo $\mathbb{R}$, cosa que no es. También lo vemos de modo sencillo porque en el desarrollo calculado, además de los senos, aparece la constante $1/2$.

$\boxed{4}$ Dada la función de variable real $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x(x+1)}{|x|} & si \quad x \neq 0, \\ 1 & si \quad x = 0, \end{cases}$ calcula su derivada generalizada y determina si tiene derivada débil.

$\boxed{\text{Solución}}$. Calculamos su derivada desde la definición:

$$\langle f', \phi\rangle := -\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)dx = \int_{-\infty}^0 (x+1)\phi'(x)dx - \int_0^{\infty}(x+1)\phi'(x)dx,$$

aplicando integración por partes en cada integral:

$$\langle f', \phi\rangle = -\int_{-\infty}^0 \phi(x)dx + \Big[(x-1)\phi(x)\Big]_{-\infty}^0 + \int_0^{\infty}\phi'(x)dx - \Big[(x-1)\phi(x)\Big]_0^{\infty}$$

donde, usando que $\phi(\infty) = 0 = \phi(-\infty)$, obtenemos

$$\langle f', \phi\rangle = \int_{-\infty}^0 (-1)\,\phi(x)dx + \int_0^{\infty}(1)\,\phi(x)dx - 2\phi(0).$$

Por lo tanto, identificamos la derivada generalizada como $f'(x) = \mathrm{signo}(x) - 2\delta_0$ y podemos afirmar que NO tiene derivada débil, puesto que aparece una delta de Dirac, que no es una función.

$\boxed{5}$ En función del valor m y la función $\bar{y}$ que resuelven el problema $\boxed{1}$, encuentra la C más pequeña tal que

$$\int_0^1 (u(x))^2dx \leq C\int_0^1 (u'(x))^2dx, \quad \text{para toda } u \in C_0^1(0,1),$$

y una función no nula que verifique la igualdad para la constante C obtenida.

$\boxed{\text{Solución}}$. Dada $0 \neq u \in C_0^1(0,1)$, definimos $y(x) = u(x)/\sqrt{\int_0^1 u^2(x)}$ que, al normalizarse, está en el conjunto $\mathcal{D}$ del ejercicio $\boxed{1}$. Por lo tanto $\mathcal{F}[y] \geq m$, o lo que es igual:

$$m \leq \mathcal{F}[y] = \frac{1}{2\int_0^1 u(x)dx}\int_0^1 u'(x)^2dx + \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad (2m-1)\int_0^1 u(x)dx \leq \int_0^1 u'(x)^2dx.$$

Dado que m es la constante óptima en $\boxed{1}$, aquí obtenemos $C = \frac{1}{2m-1} = \frac{1}{\pi^2}$ y la igualdad se obtiene en $u(x) = \bar{y}(x) = \pm\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\pi x)$.

CALIFICACIONES

Notas obtenidas por los alumnos en esta prueba (nota máxima por apartado: 2.5 puntos)

DNI	Mínimo	Viga	Fourier	Derivada	Poisson	NOTA
.*.012	2,5	2,5	1,6	0,5		7,1
.*.016	2,5	1	2,1	2,3		7,9
.*.043	2,3	2,5	0			4,8
.*.054	2,5	2,5	2,2		2,3	9,5
.*.078	1,5	1,5	2		2,5	7,5
.*.107	2,5	2,5		1		6
.*.187	1	0	0			1
.*.206	2,5	2,5	2,5		2,5	10
.*.226	1		1,5	0,5	0,5	3,5
.*.262	2,1	0,5	2,5		0	5,1
.*.277	2,5		2	0	2	6,5
.*.408	1	2,5	2		2,5	8
.*.413	0	2,5	2			4,5
.*.459	0,1					0,1
.*.506	2		2	0,2	0,3	4,5
.*.527			1			1
.*.552	2,5	2,5	2			7
.*.585	2,5	2,5	2,5		2,5	10
.*.628	2,5	2,5	2		2,5	9,5
.*.654	0	2	0,5		1,5	4
.*.666	2,5	2,5	0,2			5,2
.*.715	2	2,3	2	0		6,3
.*.763	2,5		2		0	4,5
.*.854	2,4	2,5	1,5	0,5		6,9
.*.879	2	1,5	0			3,5
.*.929	2,4	2,5	1,2		0	6,1
.*.985	2,5	2,5	0,5		2,3	7,8
.*.994	2,5	2,1	2		2,5	9,1

El examen puede ser revisado en tutorías