MODELOS MATEMÁTICOS II
(Guía de contenidos por sesión, hasta 22 de mayo de 2019)

Juanjo Nieto & Antonia Delgado

Curso 2018–19

CALENDARIO SEGUNDO CUATRIMESTRE
[Azul, día de clase, Rojo, día festivo/no lectivo]

				14	15	16	17
	18	19	20	21	22	23	24
	25	26	27	28			
MARZO					1	2	3
	4	5	6	7	8	9	10
	11	12	13	14	15	16	17
	18	19	20	21	22	23	24
	25	26	27	28	29	30	31
ABRIL	1	2	3	4	5	6	7
	8	9	10	11	12	13	14
	15	16	17	18	19	20	21
	22	23	24	25	26	27	28
	29	30					
MAYO			1	2	3	4	5
	6	7	8	9	10	11	12
	13	14	15	16	17	18	19
	20	21	22	23	24	25	26
	27	28	29	30	31		

-Clases: (la asistencia a clase es OBLIGATORIA)
  Lunes de 11:00 a 12:00
  Martes de 10:00 a 12:00
  Miércoles de 11:00 a 12:00

-Controles eval. continua: (fechas provisionales)

Fecha	Contenido	Valor sobre 10
7 mayo	mod. variacionales	3 ptos
29 mayo	mod. biológicos	1.5 ptos
5 junio	todo	de 5 a 7 ptos ‡

‡ Valor = 5 ptos + mín{2;(4.5−acumulado)} ptos.

-Pruebas extraordinarias:
-5 junio: prueba final única: **sólo** para los alumnos que lo hayan solicitado en plazo y les haya sido concedido (10 puntos)
-27 junio: convocatoria extraordinaria para alumnos que no hayan superado la asignatura (10 puntos).

Sesión 1: [1 hora] (18-feb-19)
-Presentación y estructura del curso

Sesión 2: [2 horas] (19-feb-19)
-Motivación:
  -curva de longitud mínima
$$\min L[y] := \min_{y\in\mathcal{D}} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'(x)^2}\, dx.$$
-Problema variacional básico $\mathcal{F}[\bar{y}] = \min_{y\in\mathcal{D}} \mathcal{F}[y]$:
$$\mathcal{F}[y] := \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))\, dx$$
-Ecuación de Euler–Lagrange: $\boxed{F_y - \frac{d}{dx}F_p = 0}$
-Conexión PV, PC y formulación débil
-Extremales de un problema de minimización

Sesión 3: [1 hora] (20-feb-19)
-Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones
-Ppio. Hamilton (Acción mínima) y Ley de Newton
-Condiciones de contorno cuando $\mathcal{D}$ no las incluye

Sesión 4: [0 horas] (25-feb-19)
-(se pasa a miércoles por permuta con Geometría)

Sesión 5: [2 horas] (26-feb-19)
-Tipos de Prob. Contorno para calcular extremales
  -Extremal único, ninguno, infinitos...
  -Condiciones Dirichlet, Newmann y periódicas
  -Ejemplos
-Convexidad y unicidad
  -Convexidad como condición suficiente de mínimo
  -Condición suficiente para tener convexidad

Sesión 6: [1+1 horas] (27-feb-19)
-Ecuación de E–L cuando $F_y = 0$: $\boxed{F_p = cte}$
-Ecuación de E–L cuando $F_x = 0$: $\boxed{F - \bar{y}'F_p = cte}$
-Oscilador armónico (acción mínima: Hooke)
-Superficies minimales de revolución: catenoide
-El modelo de la viga:
  -Empotramiento, apoyo, libertad
  -Formulación variacional de la viga

Sesión 7: [1 hora] (4-mar-19)
-Forma autoadjunta de una ecuación lineal
-FV de un PC autoadjunto y condiciones de contorno
$\boxed{F(x,y,p) = P\frac{p^2}{2} - Q\frac{y^2}{2} + Ry}$
-Condición suficiente ($Q < 0$) de existencia y unicidad

Sesión 9: [2 horas] (5-mar-19)
-Paso de CC no homogéneas a homogéneas
-Alternativa de Fredholm
-Demostración del Teorema 9
-Ejercicios: sobre el número de sols de PC

Sesión 10: [1 hora] (6-mar-19)
-La catenaria (restricciones de tipo integral)
-Problemas isoperimétricos: (rest. tipo integral)
Problema de Dido (cond. periódicas)
-Geodésicas (varias funciones + rest. algebraicas)
-Necesidad de estudiar PV con varias funciones con restricciones de tipo algebraico y de tipo integral

Sesión 11: [1 hora] (11-mar-19)
-Problemas variacionales con varias funciones
$\boxed{F_{y_i} - \frac{d}{dx}F_{p_i} = 0}$ $i = 1...n$
-PV con restricciones de tipo algebraico-diferencial
-PV con restricciones de tipo integral
$\boxed{F^* := F - \sum \lambda_j G_j} \Rightarrow \boxed{F^*_{y_i} - \frac{d}{dx}F^*_{p_i} = 0}$ $\forall i$

Sesión 12: [2 horas] (12-mar-19)
-Resolución del problema isoperimétrico básico
-Resolución de la catenaria
$\boxed{y = \lambda + C\sqrt{1+(y')^2}} \Rightarrow \boxed{y(x) = \lambda + C\cosh(\frac{x-K}{C})}$
-Problema de Dirichlet (1-D)
-$\boxed{y'' + \lambda y = 0 \text{ en } [0,1]} \Rightarrow \boxed{y_n(x) = \sqrt{2}\,\text{sen}(n\pi x)}$
-Nacimiento de los problemas de Sturm–Liouville
-Concepto de valor propio y función propia

Sesión 13: [1 hora] (13-mar-19)
-Teoría de Sturm–Liouville
-Sucesión de valores y funciones propias
-Ortogonalidad y unicidad de funciones propias
-Desarrollo en series de funciones propias
$$\boxed{y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, y_n \rangle\, y_n(x)}$$
-Igualdad de Bessel (Identidad de Parseval)

Sesión 14: [1 hora] (18-mar-19)
-Caracterización variacional de valores propios y funciones propias
-Ejercicios:
- Sturm-Liouville
- Ecuación de Euler (cambio $\boxed{s = \ln(x)}$)

Sesión 15: [1 hora] (19-mar-19)
Ejercicios:
- PC. Convexidad
- Valores y funciones propias

Sesión 16: [2 horas] (20-mar-19)
-Funcionales de funciones de más variables: $u(t,x,y)$
$$\boxed{\left(F_u - \frac{\partial}{\partial t}F_r - \frac{\partial}{\partial_x}F_p - \frac{\partial}{\partial_y}F_q\right)\Big|_{r=\frac{\partial u}{\partial t}, p=\frac{\partial u}{\partial x}, q=\frac{\partial u}{\partial x}} = 0}$$
-Formulación variacional de la Membrana
-Simplificaciones usuales:
-Equilibrio φ nulo, $u \in C_0^1(\Omega)$
-Linealización de Taylor (deformaciones pequeñas)
-Caso estacionario: $u(t,x,y) = u(x,y)$
-Casos particulares de la Membrana
-Modelo de Poisson, problema de Dirichlet, modos de vibración, superficies minimales y ecuación de Ondas

Sesión 17: [1 hora] (25-mar-19)
-Resolviendo la ecuación de Ondas en $[0,\infty) \times [0,L]$:
-Separación de variables (pb. de Sturm Liouville)
-Principio de superposición
-Necesidad del desarrollo en senos

Sesión 18: [2 horas] (26-mar-19)
-Serie (trigonométrica) de Fourier: $\forall y \in L^2(0,T)$
$$\boxed{y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) + b_n\,\text{sen}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)}$$
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx, \quad a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T y(x)\,dx,$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(x)\,\text{sen}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx.$$
-Problema de Sturm-Liouville asociado
-Teorema de Riesz–Fischer
-Ejemplo: $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum \frac{\text{sen}(2\pi n x)}{n}$ para $x \in (0,1)$.
-Convergencia
-Puntual (Fenómeno de Gibbs en discontinuidades)
-Uniforme, absoluta, de las derivadas y en media

Sesión 19: [1 hora] (27-mar-19)
-Cambio del intervalo $[0,T]$ a $[a,b]$ y $[-L,L]$
-Extensiones **par** e **impar**: serie de cosenos/senos:
$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$
$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L y(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \; b_n = \frac{2}{L}\int_0^L y(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx.$$
-Convergencia de la serie de cosenos/senos

Sesión 20: [1 hora] (1-abr-19)
-Solución de la ecuación de Ondas (uniendo todo)
-Unicidad (método de Energía)

Sesión 21: [2 hora] (2-abr-19)
-Ejemplos:

$$|x-1| = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{\substack{n\, impar \\ n\geq 1}} \frac{\cos(n\pi x)}{n^2}, \text{ en } [0,2]$$

$$E(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum \frac{\text{sen}(2\pi n x)}{n} \text{ en } \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}.$$

-Solución de la ecuación de Ondas en $[0,\infty) \times \mathbb{R}$:
-Fórmula de D'Alembert

$$u(t,x) = \frac{u_0(x+ct) + u_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y)dy.$$

-Dominio de dependencia

Sesión 22: [1 hora] (3-abr-19)
-Laplaciano en polares
-La ecuación de Dirichlet en el disco
-Separación de variables
-Conexión con el desarrollo de Fourier

Sesión 23: [1 hora] (8-abr-19)
-Fórmula de Green (integral por partes)
-Caracterización operacional de la derivada clásica
-Derivada generalizada (distribucional)
-Derivada débil (cuando "está" en L^1_{loc})

Sesión 24: [2 horas] (9-abr-19)
-Derivada de $|x|$: signo(x)
-Función Heaviside y operador delta de Dirac δ_0
-Relación derivada clásica y débil
-Espacios de Sobolev (intro): $H^1(\Omega)$ y $H^1_0(\Omega)$
-Desigualdad de Poincaré en H^1_0

Sesión 25: [1 hora] (10-abr-19)
-Formulación clásica/débil/variacional/distribucional de la membrana
-El Teorema de Lax–Milgram
-Ejemplo: $\boxed{-\sigma\Delta u + \alpha u = f}$ en H^1_0

Sesión 26: [2 horas] (23-abr-19)
-Demostración de Lax–Milgram
-Teorema de Riesz para Hilbert
-Caracterización de conjuntos densos
-Ejercicios: -resolver $\boxed{\Delta u = f}$ en H^1_0
-$f(x) = |x| - 1 \in H^1_0(B)$

Sesión 24: [1 hora] (24-abr-19)
-Introd. a los Elementos finitos
-Parte II: Modelos biológicos
-Leyes de acción de masas

Sesión 25: [1 hora] (29-abr-19)
-Concentración de equilibrio
-Modelo de Michaelis–Menten (crecimiento bacterias)
-Descripcción y ecuaciones (LAM) asociadas
-Reducción a dos ecuaciones

Sesión 26: [2 horas] (30-abr-19)
-Modelo de Michaelis–Menten
-Unidades físicas: cantidades típicas
-Quitando las unidades y constantes físicas
-Positividad y acotación: $h(\tau) = u(\tau) + \varepsilon v(\tau)$
-Existencia en $[0,\infty)$
-Comportamiento asintótico de soluciones
-Nutrientes s y encimas ligadas c decrecen
-Saturación del producto p

Sesión 27: [1 hora] (6-may-19)
-Modelos de crecimiento en poblaciones biológicas
-Malthus, exponencial: $P' = \alpha P$
-Verhulst, logístico $P' = \alpha P(1 - \frac{P}{P_\infty})$
-Efecto Allé (fuerte): $P' = \alpha P(1 - \frac{P}{P_\infty})(\frac{P}{P_{min}} - 1)$

Sesión 28: [2 horas] (7-may-19)
Primer control.

Sesión 29: [1 hora] (8-may-19)
-Crecimiento + movimiento en poblaciones biológicas
-Término de crecimiento: reacción
-Término de movimiento: flujo y corriente

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}u + \text{div}(J) = f(u)}$$

-Teorema de la divergencia de Gauss
-Ejemplo de términos de movimiento: la dispersión
-Flujo asociado a la dispersión (difusión)
-Ley de Fick (o Ley de Fourier)

Sesión 30: [1 hora] (13-may-19)
-Ecuación de la difusión (del calor) $\boxed{\partial_t u = D\Delta u}$
-Conexión entre Calor y movimiento Browniano
-Hipótesis $\delta^2/(2\tau) \to D$: régimen parabólico
-Velocidad infinita de propagación: $\delta/\tau \to \infty$

Sesión 31: [2 horas] (14-may-19)
-Resolviendo la ecuación del calor
-Clase de Schwartz
-Transformada de Fourier y transformada inversa
-Convolución
-Función de Gauss $G(x) := e^{-\pi x^2}$.
-Propiedades:
Biyectiva, $\hat{G} = G = \check{G}$, relación con derivadas, elación con homotecias, relación con convolución, unidad de la convolución
-$(G_\varepsilon * f) \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} f$, y $\hat{\delta}_0 = 1$
-Demostraciones

Sesión 32: [1 hora] (15-may-19)
-Resolviendo la ecuación del calor en $x \in \mathbb{R}$
$u_t = Du_{xx}$ con $u(0,x) = f(x)$:

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}} f(y)dy$$

-Existencia (y nota sobre unicidad)

Sesión 33: [1 hora] (20-may-19)
-Propiedades de la solución del calor
  -Conservación del signo y de la "masa"
  -decaimiento en infinito
  -disipación de energía
  -velocidad infinita de propagación
-Ejercicios: Teorema Fundamental del Cálculo

Sesión 34: [2 horas] (21-may-19)
-Volvemos a las ecuaciones de ...

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \overbrace{D\Delta u}^{\text{difusión}} + \overbrace{f(u)}^{\text{reacción}}$$

-Ejemplos: FKPP y biestable
-Adimensionalización
-Soluciones particulares de tipo onda viajera

$$u(t,x) = \phi(x-ct).$$

  -Ecuación del perfil ϕ de la onda
  -Signo de la velocidad c de la onda
-Ondas viaj. en la biestable: $f = u(1-u)(u-\beta)$

$$c = \sqrt{2}\Big(\frac{1}{2} - \beta\Big), \quad \phi(\xi) = \frac{1}{1 + Ke^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}, \ K > 0.$$

Sesión 35: [1 hora] (22-may-19)
-Ejercicios de repaso
  -Calor para $x \in [0,1]$
  -Comportamiento de p en Michaelis-Menten
  -Proceso químico de Robertson
  -Solución fundamental del calor[1]

$$U(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\Big\{-\frac{x^2}{4Dt}\Big\} \xrightarrow{t\to 0} \delta_0$$

Sesión 36: [1 hora] (27-may-19 previsto)
-Ondas viajeras en la FKPP: $f(u) = u(1-u)$
  -Puntos de equilibrio, linealización
  -Diagrama de fases en $(0,0)$ y $(1,0)$
  -Triángulo invariante
  -Existencia de ondas viajeras para $c \geq 2$

[1]Nótese que coincide con la distribución Normal de media $\mu = 0$ y varianza $\sigma^2 = 2tD$. $N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\big\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\big\}$

Sesión 37: [2 horas] (28-may-19 previsto)
-Ejercicios de repaso

Sesión 38: [1 hora] (29-may-19)
Segundo control

Ejercicios Voluntarios

1. Dado un PC en forma autoadjunta con condiciones Newman no homogéneas, encuentra un cambio de variables biyectivo que cumpla la misma EDO con distinto $R(x)$ y con condiciones Newman homogéneas.

2. Caso $z(x_0) < 0$ en demostración del teorema 9.

3. Prueba que el funcional acción asociado al problema de la catenaria no está acotado inferiormente.

4. Norma equivalente en $H_0^1(\Omega)$.

5. Propiedades restantes de T. Fourier.

6. Prueba que si la derivada débil de una función real de variable real es cero, entonces la función es constante c.p.d.

7. Adimensionalización de la ecuación biestable.

8. Velocidad (signo) en ondas viajeras crecientes.

-Apuntes de la parte I (sin verificar)

-Apuntes de la parte II (sin verificar)