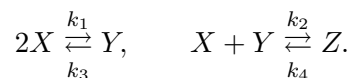


Universidad de Granada
 Dept. Matemática Aplicada
 Facultad de Ciencias

Segunda prueba
 30-Mayo-2018

MODELOS MATEMÁTICOS II
 DOBLE GRADO
 ING. INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS

1. Consideramos una reacción química con compuestos X, Y, Z donde las reacciones posibles son



- 1.a) Describe las ecuaciones que gobiernan la evolución en tiempo de las concentraciones x, y, z respectivas de cada uno de los compuestos X, Y, Z .
- 1.b) Determina si la cantidad $f(t) = x(t) + y(t) + n z(t)$ se conserva en tiempo para algún valor de n .
- 1.c) Encuentra, si los hay, todos los equilibrios del sistema.

1. a) Las ecuaciones son:

$$\begin{cases} x'(t) = -2k_1x^2 + 2k_3y - k_2xy + k_4z, \\ y'(t) = k_1x^2 - k_3y - k_2xy + k_4z, \\ z'(t) = k_2xy - k_4z. \end{cases}$$

1. b) Estudiamos $f'(t)$: $f'(t) = x'(t) + y'(t) + n z'(t) = -k_1x^2 + k_3y + (n-2)k_2xy - (n-2)k_4z$, por lo que esta cantidad NO se puede conservar para ningún valor de n . Notamos que para $n = 2$ se cancelan dos términos, pero los otros siguen estando y no son nulos.

1. c) Igualamos a cero las ecuaciones para obtener los equilibrios:

$$k_2xy - k_4z = 0, \quad k_1x^2 - k_3y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{k_1}{k_3}x^2, \quad z = \frac{k_1k_2}{k_3k_4}x^3,$$

por lo que el conjunto de posibles equilibrios es $\left\{ (x_{eq}, y_{eq}, z_{eq}) = \left(a, \frac{k_1}{k_3} a^2, \frac{k_1k_2}{k_3k_4} a^3 \right) : a \in \mathbb{R}, a \geq 0 \right\}$.

2. Consideramos la siguiente ecuación de reacción difusión:

$$\partial_t u + \beta \left(\frac{u}{u_{eq}} - 1 \right) = D \partial_{xx}^2 u, \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R},$$

donde D, β y u_{eq} son constantes físicas positivas.

2.a) Sean $y = \frac{x}{L}$, $\tau = \frac{t}{T}$ y $v(\tau, y) = \frac{u(t, x)}{u_{eq}} - 1$, donde $u(x, t)$ resuelve la ecuación anterior. Determina las expresiones que deben adoptar T y L , en términos de las constantes originales, para que $v(\tau, y)$ satisfaga la ecuación:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - v, \quad (1)$$

y determina sus dimensiones o unidades físicas.

2.b) Encuentra, caso de existir, todas las ondas viajeras asociadas a la ecuación (1), indicando claramente los valores de la velocidad de propagación admisibles.

2.a) Calculamos derivadas: $u_t = \frac{u_{eq}}{T} v_\tau$, y $u_{xx} = \frac{u_{eq}}{L^2} v_{yy}$, y sustituimos en la ecuación de u :

$$0 = u_t + \beta \left(\frac{u}{u_{eq}} - 1 \right) - D u_{xx} = \frac{u_{eq}}{T} v_\tau + \beta v - D \frac{u_{eq}}{L^2} v_{yy} = \beta \left(\frac{u_{eq}}{\beta T} v_\tau + v - \frac{D u_{eq}}{\beta L^2} v_{yy} \right),$$

por lo tanto, para que se cumpla (1), basta igualar a 1 los términos en azul, obteniendo:

$$\frac{u_{eq}}{T\beta} = 1 = \frac{D u_{eq}}{\beta L^2} \Rightarrow T = \frac{u_{eq}}{\beta}, \quad y \quad L = \sqrt{\frac{D u_{eq}}{\beta}}.$$

Calculamos ahora fácilmente sus unidades a partir de las de β y D :

$$[[\beta]] = [[\partial_t u]] = \frac{[[u]]}{[[t]]} \quad y \quad [[D]] = \frac{[[\partial_{xx} u]]}{[[x]]^2} = \frac{[[x]]^2}{[[t]]} \Rightarrow [[T]] = \frac{[[u]]}{[[\beta]]} = [[t]] \quad y \quad [[L]] = \sqrt{\frac{[[D]][[u]]}{[[\beta]]}} = [[x]],$$

esto es, tiempo y espacio respectivamente; como debe ser.

2.b) Al buscar ondas viajeras, es decir, soluciones de la forma: $v(\tau, y) = \phi(y - c\tau)$, obtenemos $v_\tau = -c\phi'$ y $v_{yy} = \phi''$, por lo que, si v cumple (1), entonces

$$(1) \Leftrightarrow v_{yy} - v_\tau - v = 0 \Leftrightarrow \phi'' + c\phi' - \phi = 0,$$

que es una EDO lineal cuyo polinomio característico es: $p(\lambda) = \lambda^2 + c\lambda - 1$, y cuyas soluciones son reales, distintas, y dadas por $\lambda_\pm = (-c \pm \sqrt{4 + c^2})/2$. Por lo tanto siempre existen perfiles de onda ϕ para cualquier valor de la velocidad $c \in \mathbb{R}$ y vienen dados por:

$$\phi(z) = A e^{\lambda_+ z} + B e^{\lambda_- z}, \quad A, B \in \mathbb{R}^+.$$

CALIFICACIONES OBTENIDAS

DNI	Ley Acción Masas (sobre 9)	Reacción-Difusión (sobre 6)	Nota (sobre 1,5)
**.*.*.*.016	0	0	0
**.*.*.*.151	0	0	0
**.*.*.*.230	2	3	0,5
**.*.*.*.277	3	3	0,6
**.*.*.*.317	3	3	0,6
**.*.*.*.346	2	3	0,5
**.*.*.*.416	4	3	0,7
**.*.*.*.442	6	5	1,1
**.*.*.*.444	7	3	1
**.*.*.*.51V	2	4	0,6
**.*.*.*.566	4	0	0,4
**.*.*.*.585	2	1	0,3
**.*.*.*.669	9	6	1,5
**.*.*.*.676	3	2	0,5
**.*.*.*.763	4	3	0,7
**.*.*.*.788	4	6	1
**.*.*.*.802	9	6	1,5
**.*.*.*.843	2	3	0,5
**.*.*.*.890	9	6	1,5
**.*.*.*.914	4	0	0,4
**.*.*.*.923	9	1	1
**.*.*.*.929	7	0	0,7
**.*.*.*.946	0	0	0

Esta prueba puede ser revisada en tutorías durante la esta semana.

Granada, 4 de junio de 2018