Universidad de Granada
Dept. Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias

Prueba final
19–Junio–2018
(corrección conjunta de varias versiones)

MODELOS MATEMÁTICOS II
DOBLE GRADO
ING. INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS

1. JUSTIFICA RAZONADAMENTE la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones

a) La función $g(x) = |x|^{-1} - 1$ está en $H_0^1(\Omega)$, siendo $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1\}$..

b) A diferencia de la ecuación de Ondas, la ecuación del Calor (con $D, L > 0$)
$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ en } (t,x) \in (0,\infty) \times (0,L), \qquad \text{con } u(t,0) = u(t,L) = 0 \text{ para } t \in (0,\infty),$$
no admite soluciones en variables separadas, salvo para el dato inicial $u(0,x) = 0$.

c) La función $f(t,x) = e^{6t-3x}$ es una solución de la ecuación de reacción difusión $v_t = v_{xx} - 3v$, de tipo onda viajera y con velocidad $c = 6$.

d) Si las soluciones de $\begin{cases} x' = (x+1)\,y - x \\ 3\,y' = x - (x+3)\,y, \end{cases}$ son positivas, entonces $(x + 3y)$ permanece acotada.

e) El funcional $a(u,v) = \int_{\mathbb{R}^2} \Big(3\nabla u \cdot \nabla v + uv - 2\partial_x u \partial_y v - 2\partial_y u \partial_x v\Big) dxdy$ es simétrico y coercivo sobre el espacio $H^1(\mathbb{R}^2)$.

f) El siguiente problema de contorno: $y'' - 2y' + \lambda e^x + y = 0$, con $y'(0) = 1$ e $y'(1) = 0$, posee una única solución para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

g) Dadas las reacciones: $2X + Y \rightleftarrows Z$, $\quad Z + Y \rightleftarrows W$, entonces, llamando $x = [X]$, $y = [Y]$, $z = [Z]$ y $w = [W]$, las cantidades $(y + z + 2w)$ y $(x + z + w)$ se conservan.

h) La función $u(t,x) = \operatorname{sen}(4x)\cos(2t) + \operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(t/2)$ es una extremal del problema consistente en minimizar el funcional $\mathcal{F}(u) = \int_0^\pi \int_0^\pi \Big(4(\partial_t u)^2 - (\partial_x u)^2\Big) dxdt$, sobre el dominio
$$\mathcal{D} := \left\{ u \in \mathcal{C}^1([0,\pi]^2) \;\middle|\; \begin{array}{lll} u(0,x) = \operatorname{sen}(4x), & u(\pi,x) = \operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}(4x), & \text{para } x \in [0,\pi], \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & & \text{para } t \in [0,\pi] \end{array} \right\}.$$

1.a) Usaremos dos resultados de clase:

- la derivada débil de $|x|^\alpha$ es $\nabla |x|^\alpha = \alpha\, x\, |x|^{\alpha-2}$,
- la función $1/|x|^\beta$ está en $L^p(\Omega)$ sii $\beta p < 3$.

Primero notamos que SÍ: $g(x) = 1/1 - 1 = 0$ cuando $|x| = 1 \Leftrightarrow x \in \partial\Omega$, que es necesario para estar en $H_0^1(\Omega)$. Ahora, usando el segundo resultado, tenemos que que $g(x)$ SÍ está en $L^2(\Omega)$.
Por último, combinando ambos, la derivada débil de g es $\nabla g(x) = -x/|x|^{-3}$ y NO está en $L^2(\Omega)$ porque $|\nabla g| = 1/|x|^2$ y $2 \times 2 = 4 > 3$.

Combinando los tres hechos, la afirmación es falsa, porque falla una de las condiciones.

1.b) A priori, la comparación con ondas es irrelevante, y no hay nada que impida la existencia de este tipo de soluciones. Vamos a buscar alguna. Planteamos $u(t,x) = T(t)W(x)$ y nos dejamos llevar:
$$u_t = Du_{xx} \Rightarrow T'W = D\,TW'' \Rightarrow T'(t)/(DT(t)) = W''(x)/W(x)$$
Esto conllevaría a que dicha expresión fuese constante. Por lo tanto tendría que cumplirse
$$W''/W = cte = -\lambda \Leftrightarrow W'' + \lambda W = 0, \quad y \quad u(t,0) = u(t,L) = 0 \Rightarrow W(0) = W(L) = 0,$$
problema de SL que ya hemos resuelto y que tiene por soluciones $W_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ para $\lambda_n = (n\pi/L)^2$. Con este valor de λ_n, resolvemos la ecuación de T:
$$\frac{T'}{DT} = -\lambda_n \Leftrightarrow T' = -D\lambda_n T \Rightarrow T(t) = A_n e^{D\lambda_n t}, \quad A_n \in \mathbb{R}.$$
Por lo tanto, es falsa, ya que hemos encontrado infinitas soluciones en variables separadas, por ejemplo
$$u(t,x) = \exp\Big(\frac{D\pi^2}{L^2}t\Big)\,\operatorname{sen}\Big(\frac{\pi}{L}x\Big).$$

1.c) Observamos primero que la función f es solución de la ecuación: $f_t - f_{xx} + 3f = (6-(-3)^2+3)e^{6t-3x} = 0$, y que claramente se puede escribir como

$$f(t,x) = e^{6t-3x} = e^{-3(x-2t)}, \quad \text{es decir,} \quad f(t,x) = \phi(x-2t), \quad \phi(z) = e^{-3z},$$

por lo que sí es de tipo onda viajera. Sin embargo, la afirmación es falsa porque la velocidad de tal onda (incluso sin haber verificado que fuese solución) es $c = 2$ y no $c = 6$.

1.d) Es Michaelis-Menten y es verdadera, ya que $(x+3y)' = -2y \leq 0$, implica que tal expresión es decreciente y, como ha de ser positiva, queda acotada entre 0 y su máximo valor, que lo alcanza en el instante inicial.

1.e) El funcional es claramente simétrico porque

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_{\mathbb{R}^2} \Big(3\nabla u \cdot \nabla v + uv - 2\partial_x u \partial_y v - 2\partial_y u \partial_x v\Big) dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \Big(3\nabla v \cdot \nabla u + vu - 2\partial_y u \partial_x v - 2\partial_x u \partial_y v\Big) dxdy = a(v,u). \end{aligned}$$

Veamos si podemos ver la coercividad (simplemente agrupando términos para obtener un cuadrado perfecto):

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_{\mathbb{R}^2} \Big(3|\nabla u|^2 + u^2 - 4u_x u_y\Big) dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} \Big(3u_x^2 + 3u_y^2 + u^2 - 4u_x u_y\Big) dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \Big(u_x^2 + u_y^2 + u^2 + 2\overbrace{(u_x^2 + u_y^2 - 2u_x u_y)}^{es\ \geq 0}\Big) dxdy) \geq \int_{\mathbb{R}^2} \Big(u_x^2 + u_y^2 + u^2\Big) dxdy = \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^2)}, \end{aligned}$$

por lo que es verdadesra, y con constante de coercividad $\alpha = 1$.

1.f) Tanto para atacarlo directamente como para usar la Altenativa de Fredholm, primero resolveremos la EDO homogénea, cuyo polinomio característico es $\mu^2 - 2\mu + 1 = (\mu-1)^2$, por lo que tiene una única raíz real doble. Por lo tanto, las soluciones de la homogénea son de la forma $y_h(x) = e^x(A+Bx)$, con A y B reales. Si usamos Fredholm, en este caso basta ver que la homogénea con CC homogéneas posee únicamente la solución nula (repasar el ejercicio 4):

$$y'(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0, \quad y'(1) = 0 \Rightarrow A + 2B = 0 \qquad \Rightarrow A = B = 0.$$

También se puede calcular explícitamente la solución (la solución particular, mediante coeficientes indeterminados, sería $y_p(x) = -\lambda x^2 e^x/2$) obteniendo como única solución $y(t) = e^x(4 - 3\lambda + (3\lambda - 2)x - \lambda x^2)/2$. Verdadero.

1.g) Escribimos las ecuaciones asociadas (añadimos las k_i, aunque no se usen) y calculamos

$$\left.\begin{array}{rrrrr} x'(t) = & -2k_1x^2y & +2k_2z & & \\ y'(t) = & -k_1x^2y & +k_2z & -k_3zy & +k_4w \\ z'(t) = & k_1x^2y & -k_2z & -k_3zy & +k_4w \\ y'(t) = & & & k_3zy & -k_4w \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (y+z+2w)' = 0, \\ \\ (x+z+w)' = -k_1x^2y + k_2z, \end{array}\right.$$

por lo que la primera cantidad sí se conserva, pero no la segunda. La afirmación es, por lo tanto, falsa.

1.e) Veamos primero si $u \in \mathcal{D}$:

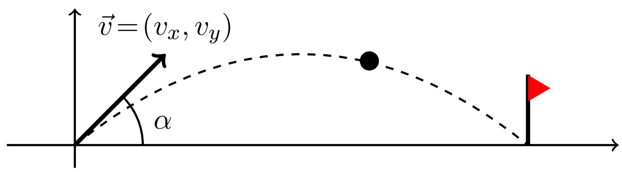
$$\left.\begin{array}{l} u \in \mathcal{C}^1, \ \checkmark \ (\text{de hecho es } \mathcal{C}^\infty), \\ u(0,x) = \operatorname{sen}(4x)\cos(0) + \operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(0) = \operatorname{sen}(4x), \ \checkmark \\ u(t,0) = \operatorname{sen}(0)\cos(t) + \operatorname{sen}(0)\operatorname{sen}(t/2) = 0, \ \checkmark \\ u(t,\pi) = \operatorname{sen}(\pi)\cos(t) + \operatorname{sen}(\pi)\operatorname{sen}(t/2) = 0, \ \checkmark \\ u(\pi,x) = \operatorname{sen}(4x)\cos(\pi) + \operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(\pi/2) = \operatorname{sen}(4x) + \operatorname{sen}(3x), \ \checkmark \end{array}\right\} \Rightarrow u \in \mathcal{D}.$$

Además, para ser extremal, ha de ser solución de la ecuación de Euler Lagrange asociada que en este caso es (recordar la ecuación de ondas con $c = 1/4$): $4u_{tt} - u_{xx} = 0$. Verificamos

$$\left.\begin{array}{l} u_{tt} = -4\operatorname{sen}(4x)\cos(2t) - \operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(t/2)/4 \\ u_{xx} = -16\operatorname{sen}(4x)\cos(2t) - 9\operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(t/2) \end{array}\right\} \Rightarrow 4u_{tt} - u_{xx} = -5\operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(t/2) \neq 0,$$

por lo que no es una extremal y la afirmación es falsa.

2. En el siguiente ejercicio se pretende estudiar la trayectoria de una bola de golf de masa $M_a > 0$ que es lanzada en un terreno completamente horizontal con una cierta velocidad inicial $\vec{v}$ y que está sometida únicamente a la fuerza de la gravedad, esto es, despreciamos el rozamiento con el viento. Como no hay fuerzas que desvíen lateralmente el proyectil, suponemos que se mueve únicamente en un plano; concretamente supondremos que el desplazamiento horizontal corresponde al eje OX mientras que la altura $y(t) \geq 0$ se representará en el eje OY, y la trayectoria entonces quedará descrita por una curva plana $\beta(t) = (x(t), y(t))$, que parte del origen de coordenadas: $\beta(0) = (0, 0)$.



Además, recordamos que la energía potencial (asociada a la gravedad vertical) es $E_P = M_a\, g\, y(t)$ (siendo $g = 9.8\, m/s^2$) y que la energía cinética asociada es $E_K = \frac{1}{2} M_a (\beta'(t))^2$.

a) Si la bola vuela durante T segundos antes de tocar el suelo a K metros de distancia del punto de salida, determina (según el principio de Hamilton), el funcional (dependiente de dos funciones) cuyo mínimo es la trayectoria buscada, y el conjunto en que crees que debería estar definido.

b) Calcula la(s) extremal(es) del problema anterior y justifica, si es posible, la existencia y unicidad de la trayectoria buscada.

c) Si, en un golpeo, la bola tardó $\frac{20}{7}$ segundos en alcanzar los 40 metros, determina la velocidad y el ángulo inicial con que se golpeó la bola, esto es, $|\vec{v}|$ y $\alpha = \arctan\Big(v_y/v_x\Big)$.

$\boxed{\text{2.a)}}$ Según el ppio de Hamilton, el funcional acción a minimizar es $\mathcal{F} = \int_0^T (E_k - E_P)dt$, esto es

$$\mathcal{F}[x,y] = \int_0^T (E_K - E_P)dt = M_a \int_0^T \left(\frac{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}{2} - g\, y(t) \right) dt = M_a \int_0^T F(t, x(t), y(t), x'(t), y'(t))dt,$$

siendo $F(t, x, y, p, q) = (p^2 + q^2)/2 - g\, y$, (nótese que el valor de M_a no interfiere en el mínimo) y definido en

$$\mathcal{D} = \Big\{ x(t)\ e\ y(t) \in C^1([0, T]) : y(0) = y(T) = 0,\ x(0) = 0, x(T) = K \Big\}.$$

$\boxed{\text{2.b)}}$ Las ecuaciones de Euler-Lagrange (y sus soluciones) son:

$$\begin{cases} F_x - (F_p)' = 0 \\ F_y - (F_q)' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x'' = 0 \\ -g - y'' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = A + B\, t, \\ y(t) = C + D\, t - \frac{1}{2} g\, t^2, \end{cases}$$

donde, imponiendo las condiciones de contorno $y(0) = y(T) = x(0) = 0, x(T) = K$ del conjunto $\mathcal{D}$, obtenemos una única extremal:

$$x(t) = \frac{K}{T} t, \qquad y(t) = \frac{g}{2}\, t\, (T - t).$$

Como estamos en condiciones de convexidad, ya que $Hess_{x,y,p,q}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es semidefinida positiva, concluimos que esta única extremal es la trayectoria seguida por la bola.

$\boxed{\text{2.c)}}$ Basta sustituir los datos, notando que la velocidad inicial es $\beta'(0)$:

$$\vec{v} = (v_x, v_y) = (x'(0), y'(0)) = \left(\frac{K}{T}, \frac{gT}{2} \right) = \left(\frac{40m}{20/7s}, \frac{9.8\frac{m}{s^2}\, 20/7m}{2} \right) = (14, 14)\, \frac{m}{s},$$

por lo que la bola fue golpeada a $|\vec{v}| = 14\sqrt{2}\, \frac{m}{s}$ con un ángulo de 45 grados (o $\frac{\pi}{4} rad$) respecto del suelo.

3. Encuentra explícitamente la solución $u = u(t,x)$ del siguiente problema de Cauchy para la ecuación de Ondas, planteado en el intervalo $[0,2]$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{ en } (t,x) \in (0,\infty)\times(0,2), \text{ con } \begin{cases} u(t,0) = u(t,2) = 0 & \text{para } t \in (0,\infty), \\ u(0,x) = \operatorname{sen}(4\pi x) & \text{para } x \in [0,2], \\ \partial_t u(0,x) = 1 - |x-1| & \text{para } x \in [0,2], \end{cases}$$

y justifica en su caso, el tipo de convergencia de la serie obtenida.

$\boxed{3.}$ Esbozamos los pasos teóricos dados en clase. Primero buscamos soluciones no nulas en variables separadas $u(t,x) = T(t)W(x)$. Al imponer estos perfiles se obtienen sendos problemas

$$T''(t) + 9\lambda T(t) = 0, \quad y \quad W''(x) + \lambda W(x) = 0, \ con\ W(0) = W(2) = 0.$$

Al resolver el problema de S-L en x, obtenemos la sucesión de autovalores $\lambda_n = \frac{(n\pi)^2}{4}$ y autofunciones (soluciones no nulas) $W_n(x) = \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{2})$. Al sustituir los λ_n en la ecuación de T, obtenemos finalmente una familia de funciones soluciones de la ecuación de ondas con las condiciones de contorno:

$$u_n(t,x) = T_n(x)W_n(x) = \Big(A\cos\big(\frac{3n\pi t}{2}\big) + B\operatorname{sen}\big(\frac{3n\pi t}{2}\big)\Big)\operatorname{sen}\big(\frac{n\pi x}{2}\big).$$

Usando el principio de superposición, proponemos la solución de la forma

$$u(t,x) = \sum_{n\geq 1}\Big(A_n\cos\big(\frac{3n\pi t}{2}\big) + B_n\operatorname{sen}\big(\frac{3n\pi t}{2}\big)\Big)\operatorname{sen}\big(\frac{n\pi x}{2}\big),$$

e imponemos las condiciones iniciales para calcular los coeficientes A_n y B_n.

$$u(0,x) = \sum_{n\geq 1} A_n \operatorname{sen}\big(\frac{n\pi x}{2}\big) = \operatorname{sen}(4\pi x), \qquad \partial_t u(0,x) = \sum_{n\geq 1}\frac{3n\pi B_n}{2}\operatorname{sen}\big(\frac{n\pi x}{2}\big) = 1 - |x-1|.$$

En este caso, deducimos inmediatamente $A_8 = 1$ y $A_n = 0$ para $n \neq 8$, pero para determinar los B_n necesitamos la serie de Fourier de $v_0(x) = 1 - |x-1|$, en el intervalo $[0,2]$. Como sabemos es

$$v_0(x) = \sum_{n\geq 1} b_n \operatorname{sen}\big(\frac{n\pi x}{2}\big), \quad donde \quad b_n = \int_0^2 v_0(x)\operatorname{sen}\big(\frac{n\pi x}{2}\big),$$

por lo que simplemente nos resta calcular los b_n y escribir $B_n = 2b_n/(3n\pi)$.

$$\begin{aligned} b_n &= \int_0^2 v_0(x)\operatorname{sen}\big(\frac{n\pi x}{2}\big)dx = \int_0^1 x\operatorname{sen}\big(\frac{n\pi x}{2}\big)dx + \int_1^2 (2-x)\operatorname{sen}\big(\frac{n\pi x}{2}\big)dx \overset{partes}{=} \\ &= \int_0^1 \frac{2}{n\pi}\cos\big(\frac{n\pi x}{2}\big)dx - \Big[\frac{2x}{n\pi}\cos\big(\frac{n\pi x}{2}\big)\Big]_0^1 - \int_1^2 \frac{2}{n\pi}\cos\big(\frac{n\pi x}{2}\big)dx - \Big[\frac{2(2-x)}{n\pi}\cos\big(\frac{n\pi x}{2}\big)\Big]_1^2 \\ &= \Big[\frac{4}{(n\pi)^2}\operatorname{sen}\big(\frac{n\pi x}{2}\big)\Big]_0^1 - \Big(\frac{2}{n\pi}\cos\big(\frac{n\pi}{2}\big)\Big) - \Big[\frac{4}{(n\pi)^2}\operatorname{sen}\big(\frac{n\pi x}{2}\big)\Big]_1^2 + \Big(\frac{2}{n\pi}\cos\big(\frac{n\pi}{2}\big)\Big) \\ &= -\Big(\frac{4}{(n\pi)^2}\operatorname{sen}\big(\frac{n\pi}{2}\big)\Big) - \Big(\frac{4}{(n\pi)^2}\operatorname{sen}\big(\frac{n\pi}{2}\big)\Big) = \frac{-8}{(n\pi)^2}\operatorname{sen}\big(\frac{n\pi}{2}\big). \end{aligned}$$

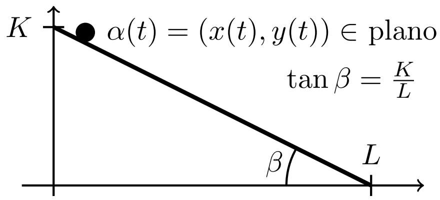
Como vemos que $b_n = 0$ si n es par, renumeramos sólo los impares $n = 2k-1$, de modo que

$$b_{2k-1} = \frac{-8}{\pi^2(2k-1)^2}\operatorname{sen}\big(\frac{(2k-1)\pi}{2}\big) = \frac{-8}{\pi^2(2k-1)^2}(-1)^{k+1} = \frac{(-1)^k 8}{\pi^2(2k-1)^2}.$$

Para concluir, simplemente escribimos la solución obtenida:

$$u(t,x) = \cos(12\pi t)\operatorname{sen}(4\pi x) + \frac{16}{3\pi^3}\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{(2k-1)^3}\operatorname{sen}\big(\frac{3(2k-1)\pi t}{2}\big)\operatorname{sen}\big(\frac{(2k-1)\pi x}{2}\big).$$

4. En el siguiente ejercicio estudiamos la trayectoria de una bola de masa $M > 0$ kilogramos que desciende sin rozamiento por un plano inclinado que forma un ángulo β respecto del eje horizontal y que está sometida únicamente a la fuerza de la gravedad.



$$\left.\begin{array}{r} \alpha(t) = (x(t), y(t)) \in \text{plano inclinado} \\ \tan\beta = \frac{K}{L} \end{array}\right\} \Rightarrow \tan\beta = \frac{y}{L-x} \Rightarrow y = K - \tan(\beta)\, x$$

Podemos suponer que se mueve únicamente en el plano XY, que el desplazamiento horizontal corresponde al eje OX, que la altura $y(t) \geq 0$ se representa en el eje OY, de modo que la trayectoria quedará descrita por una curva plana $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ cuya traza ha de estar sobre la recta $y = K - \tan(\beta)x$. Recordamos que la energía cinética asociada es $E_K = \frac{1}{2}M|\alpha'(t)|^2$ y que la energía potencial (respecto al origen) es $E_P = Mgy(t)$ (siendo $g = 9.8\, m/s^2$).

a) Si la bola parte desde una altura de $K > 0$ metros y en $T > 0$ segundos alcanza el nivel del suelo, habiendo recorrido una distancia horizontal de L metros, determina (según el principio de Mínima Acción de Hamilton), el funcional (dependiente de dos funciones) cuyo mínimo es la trayectoria buscada, y el conjunto (con todas sus restricciones) en que crees que debería estar definido.

b) Calcula la(s) extremal(es) del problema anterior y justifica, si es posible, la existencia y unicidad de la trayectoria buscada.

c) Si $\tan(\beta) = \frac{1}{2}$ y la bola partió del reposo y tardó $\frac{5}{7}$ segundos en llegar abajo, calcula K y L.

$\boxed{\text{4.a)}}$ Según el ppio de Hamilton, el funcional acción a minimizar es $\mathcal{F} = \int_0^T (E_k - E_P)dt$, esto es

$$\mathcal{F}[x,y] = \int_0^T (E_K - E_P)dt = M \int_0^T \left(\frac{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}{2} - g\, y(t) \right) dt,$$

y definido en $\mathcal{D} = \Big\{ x(t) \ e \ y(t) \in C^1([0,T]) : y(0) = K, y(T) = 0,\ x(0) = 0, x(T) = L, y = K - \tan(\beta)\, x \Big\}$.

$\boxed{\text{4.b)}}$ Para la extremal, primero simplificamos usando la restricción $y = K - \tan(\beta)\, x$, que despeja y en función de x, quedando:

$$\mathcal{F}[x] = M \int_0^T \left(\frac{1+\tan^2(\beta)}{2}(x'(t))^2 + g\tan(\beta)x(t) \right) dt - MgKT = M \int_0^T F(t,x,x')\, dt - cte$$

siendo $F(t,x,p) = Bp^2/2 - Ax$, notando $B = (1 + \tan^2(\beta))$ y $A = g\tan(\beta)$ por simplificar. Así queda sólo una ecuaciónde Euler-Lagrange, que resolvemos:

$$0 = (F_p)' - F_x = -A + Bx'' \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{A}{2B}t^2 + C_1 t + C_2, \qquad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponiendo las condiciones de contorno $x(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$ y $x(T) = L$ produce $C_1 = L/T - AT/(2B)$. Y por supuesto, $y(t)$ seguirá dada por la relación $y = K - \tan(\beta)\, x = K - \frac{A}{2B}t^2 - C_1 t$. Así obtenemos una única extremal y como estamos en condiciones de convexidad, ya que $Hess_{x,p}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es semidefinida positiva, concluimos que esta única extremal es la trayectoria seguida por la bola.

$\boxed{\text{4.c)}}$ Basta sustituir los datos, notando que $9.8 = 7^2/5$ y que "partir del reposo" implica que la velocidad inicial es cero: $0 = x'(0) = C_1$.

$$x(t) = \frac{A}{2B}t^2 = \frac{g\tan(\beta)}{2(1+\tan^2(\beta))}t^2 = \frac{7^2/5 \times 1/2}{2(1+1/4)}t^2 = \frac{7^2}{5^2}t^2.$$

Por lo tanto, la condición $x(T) = L$ nos dice que $L = x(5/7) = 1$, y como $\tan(\beta) = 1/2 = K/L$, finalmente tenemos $K = 1/2$.

$\boxed{\text{4.b) alternativo}}$ Si no se usa la restricción $y = K - \tan(\beta)\, x$ para eliminar una variable sino que se aplica el teorema de los multiplicadores de Lagrange para ligaduras algebráicas, lo haríamos como indica la teoría: construimos un $\mathcal{F}^*[x, y, \lambda]$ como: (poner una M fuera no es necesario, pero se simplifica antes):

$$\mathcal{F}^*[x, y, \lambda] := \mathcal{F}[x, y] - M \int_0^T \lambda(t)\Big(y(t) + \tan(\beta)\, x(t) - K\Big)dt = M \int_0^T F^*(t, x, y, \lambda, x', y', \lambda')dt$$

donde $F^*(t, x, y, \lambda, p, q, r) = (p^2 + q^2)/2 - gy - \lambda\big(y + \tan(\beta)\, x - K\big)$. Ahora, las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\begin{cases} (F^*_p)' - F^*_x = 0 \\ (F^*_q)' - F^*_y = 0 \\ (F^*_r)' - F^*_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' + \lambda \tan(\beta) = 0, \\ y'' + g + \lambda = 0, \\ 0 \ + (y + \tan(\beta)\, x - K) = 0. \end{cases}$$

Si despejamos $y(t)$ en la tercera y lo sustituimos en la segunda: $\boxed{y = K - \tan(\beta)\, x} \Rightarrow \boxed{\lambda = \tan(\beta)\, x'' - g}$, y ahora sustituimos este valor de $\lambda(t)$ en la primera, obtenemos

$$0 = x'' + \lambda \tan(\beta) = x'' + (\tan(\beta)\, x'' - g) \tan(\beta) = \Big(1 + \tan^2(\beta)\Big)x'' - g \tan(\beta) = Bx'' - A,$$

que es ¡menos mal! la misma ecuación que nos ha salido antes, por lo que se concluye igual ($\mathcal{F}[x, y]$ ó $\mathcal{F}^*[x, y, \lambda]$ también son convexos). Lo único nuevo es que, además, podemos calcular el valor del multiplicador de Lagrange

$$\lambda(t) = \tan(\beta)\, x'' - g = \frac{g \tan^2(\beta)}{1 + \tan^2(\beta)} - g = g\, \frac{\tan^2(\beta) - 1}{1 + \tan^2(\beta)}.$$

5. Considera el funcional $\mathcal{F}[y] = \displaystyle\int_1^e x^3 \Big(y'(x)\Big)^2 dx$, definido sobre el conjunto
$$\mathcal{D} = \Big\{y \ \in C^1_0([1, e]), \ \int_1^e xy(x)^2\, dx = 1, \ \int_1^e y(x) \operatorname{sen}(25\pi \ln(x))\, dx = 0\Big\} \cap C^2([1, e]),$$
Calcula sus extremales y determina si tiene mínimo. En caso afirmativo, calcúlalo y determina todas las funciones en las que lo alcanza.

$\boxed{5.}$ Antes de aplicar el teorema general de problemas variacionales con restricciones integrales (que podría conllevar cierta dificultad, aunque funciona) observamos que la primera restricción es una normalización y la segunda de ortogonalidad, de modo que podría ser de aplicabilidad el teorema de formulación variacional de problemas de Sturm-Liouville. De hecho, observando los datos, si tomamos $0 < P(x) = x^3$, $Q(x) = 0$ y $S(x) = x$ sabemos que el problema de Sturm-Liouville asociado es $(Py')' + \lambda S y = 0$, con condiciones Dirichlet homogéneas, es decir,

$$\Big(x^3 y'\Big)' + \lambda xy = x\Big(x^2 y'' + 3xy' + \lambda y\Big) = 0\,, \quad y(1) = y(e) = 0\,. \tag{1}$$

Dividimos por $x \neq 0$, para simplificar la EDO y, como es una ecuación e tipo Euler, para calcular todos los autovalores hacemos el cambio de variable estándar: $\boxed{x = e^t}$, de donde

$$z(t) = y(x), \ \Rightarrow \ z'(t) = y'(x)x, \ \Rightarrow \ z''(t) = y''(x)x^2 + y'(x)x,$$

y, sustituyendo, obtenemos el siguiente problema de contorno:

$$0 = x^2 y''(x) + 3xy'(x) + \lambda y(x) = z''(t) + 2z'(t) + \lambda z(t), \qquad z(0) = y(1) = 0 = y(e) = z(1).$$

Para calcular los posibles valores propios, usamos el polinomio característico: $p(\mu) := \mu^2 + 2\mu + \lambda$, cuyas raíces son $\mu_\pm = -1 \pm \sqrt{1 - \lambda}$, lo que nos plantea los siguientes casos:

$\boxed{\lambda < 1}$ En este caso las dos raíces son reales y las soluciones son $z(t) = Ae^{\mu_+ t} + Be^{\mu_- t}$. Al imponer las condiciones de contorno obtenemos:

$$z(0) = A + B = 0, \qquad z(1) = e^{\mu_+} A + e^{\mu_-} B = 0 \ \Rightarrow A = B = 0.$$

Como buscamos soluciones no nulas, no hay valores propios en este caso.

$\boxed{\lambda = 1}$ En este caso hay una única raíz real $\mu = -1$ doble, y las soluciones son $z(t) = e^{-t}(A + Bt)$, pero al imponer las condiciones de contorno obtenemos de nuevo únicamente la solución nula.

$\boxed{\lambda > 1}$ En este caso hay dos raíces complejas conjugadas, y las soluciones son de la forma

$$z(t) = e^{-t}\Big(A\,\text{sen}(\sqrt{\lambda - 1}t) + B\cos(\sqrt{\lambda - 1}t)\Big).$$

Imponemos las condiciones de contorno:

$$z(0) = B = 0, \quad z(1) = Ae^{-1}\,\text{sen}(\sqrt{\lambda - 1}t) \Leftrightarrow \sqrt{\lambda - 1} = n\pi,\ n \in \mathbb{N}.$$

Deducimos pues los valores y funciones propias $\lambda_n = 1 + (n\pi)^2$ y $z_n = A_n e^{-t}\,\text{sen}(n\pi t)$. Deshaciendo el cambio obtenemos

$$y_n(x) = z_n(\ln(x)) = A_n e^{-\ln(x)}\,\text{sen}(n\pi\ln(x)) = A_n\frac{1}{x}\,\text{sen}(n\pi\ln(x)).$$

Con esto ya podemos concluir, puesto que la condición integral del conjunto $\mathcal{D}$ ahora se convierte en

$$\int_1^e y(x)\,x\,\frac{1}{x}\,\text{sen}(25\pi\ln(x))\,dx = \int_1^e S(x)\,y(x)\,y_{25}(x)\,dx = \langle y, y_{25}\rangle_S = 0,$$

esto es, una condición de ortogonalidad a la 25-autofunción y, como ya sabemos que todas las autofunciones son S-ortogonales entre si, sabemos que y_1 cumple esta restricción. Si aplicamos el teorema de formulación variacional de problemas de Sturm-Liouville, sabemos que el operador $\mathcal{F}$ sobre el conjunto (más grande)

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ y \in C_0^1[1, e];\ \int_1^e xy(x)^2\,dx = 1 \right\},$$

alcanza su mínimo en $\pm y_1(x)$ y vale $\lambda_1 = 1 + \pi^2$. Pero como y_1 ya es ortogonal a y_{25}, tenemos $y_1 \in \mathcal{D} \subset \mathcal{D}_1$, por lo que el mínimo de $\mathcal{F}$ sobre el conjunto $\mathcal{D}$ (que es lo que pide el enunciado) es el mismo. Para acabar, sólo resta calcular A_1 usando la otra restricción:

$$1 = \int_1^e xy_1(x)^2\,dx = \int_1^e A_1^2\frac{\text{sen}^2(\pi\ln(x))}{x}dx \overset{t=\ln(x)}{=} A_1^2\int_0^1 \text{sen}^2(\pi t)dt = A_1^2\int_0^1 \frac{1 - \cos(2\pi t)}{2}dt = \frac{A_1^2}{2},$$

Por lo que concluimos que el mínimo de $\mathcal{F}$ es $\lambda_1 = 1 + \pi^2$, y lo alcanza en dos funciones opuestas:

$$y_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{x}\,\text{sen}(\pi\ln(x)) \quad \text{y} \quad -y_1(x).$$

Universidad de Granada
Dept. Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias

MODELOS MATEMÁTICOS II
DOBLE GRADO
ING. INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS

CALIFICACIONES OBTENIDAS EN LA PRUEBA FINAL Y NOTA FINAL POR CURSO (EVALUACIÓN CONTINUA Y EVALUACIÓN ÚNICA FINAL)

DNI	Verdadero-Falso (sobre 4)	Bola (sobre 3)	Ondas/Fourier/Strurm-Liouville (sobre 3)	Nota final Junio (sobre 10)
.*.230	2,5	1,8	0	5,4
.*.258	1,7	0,8	0	2,2
.*.262	1	0,5	0,5	1,6
.*.277	2	0	1,5	3,3
.*.346	3	0,4	2	5,8
.*.416	1	2,4	0	4,2
.*.442	2,4	0,2	1	4,1
.*.444	1,5		1,5	3,3
.*.51V	0,5	1,8	2,5	5,7
.*.566	2	2,2	2,5	5,1
.*.669	4	2,8	2,8	10 (Mat Honor)
.*.676	1,5	0,5	0	2,7
.*.763	2		0	3,2
.*.788	3,7	2,3	2,5	9,2 (Mat Honor)
.*.843	1	1,2	0	2
.*.890	3	0,6	3	8,2
.*.914	2,3		1	4
.*.923	2			4,1
.*.929	1		0,5	3,3
.*.946	1,8	1,4	2,8	6,1

LA CALIFICACIÓN DEL RESTO DE ESTUDIANTES ES “NO PRESENTADO”.

REVISIÓN DEL EXAMEN: Martes 26 a las 10:00h en el despacho del profesor Nieto.

Granada, 20 de Junio de 2018