Universidad de Granada
Dept. Matemática Aplicada
ETS Caminos, Canales y Puertos

Examen extraordinario
2^o B
12–feb–2018

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
GRADO EN INGENIERÍA CIVIL

1. Justifica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
   1.a) Un punto de una superficie regular S verificando $g = f = 0$, es un punto parabólico.
   1.b) Todos los puntos de la línea de estricción del hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (que es una circunferencia), son puntos elípticos.
   1.c) En una curva regular con torsión constante, siempre se cumple que $\|B''\| = |\tau|\sqrt{k^2 + \tau^2}$.

Solución. La 1.a) es cierta, puesto que la curvatura de Gauss se calcula como $K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$ y, por lo tanto, en este caso es 0, que es lo que caracteriza los puntos parabólicos.

El 1.b) es obviamente falso, ya que TODOS los puntos de un hiperboloide (incluyendo los de su línea de estricción) son hiperbólicos.

El 1.c) es cierto, sólo hay que comprobarlo (usando las fórmulas de Frenet)

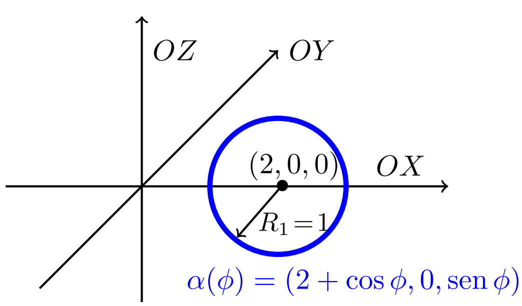
$$B' = \tau N \quad \Rightarrow \quad B'' = \tau' N + \tau N' = \tau' N - \tau(kT + \tau B) = -k\tau\, T + \tau' N - \tau^2 B,$$

y como la torsión es constante, entonces $\tau' = 0$, y nos queda:

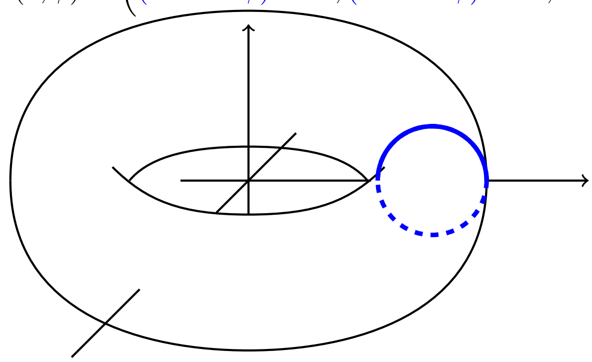
$$B'' = -k\tau\, T - \tau^2 B \quad \Rightarrow \quad \|B''\| = \sqrt{\langle B'', B''\rangle} = \sqrt{k^2\tau^2 + \tau^4} = \sqrt{\tau^2(k^2 + \tau^2)} = |\tau|\sqrt{k^2 + \tau^2}.$$

2. Considera la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ generada al girar en torno al eje OZ la circunferencia contenida en el plano OXZ cuyo centro es $(2, 0, 0)$ y tiene radio 1.
   2.a) Dibuja (aproximadamente) dicha superficie y determina una parametrización de la misma.
   2.b) Indica razonadamente si es reglada o no y, en caso afirmativo, determina todas las generatrices rectilíneas que pasan por el punto $(0, 3, 0)$.
   2.c) Determina la matriz de la primera forma fundamental y la aplicación N de Gauss.
   2.d) Calcula las curvaturas principales y clasifica todos los puntos de dicha superficie.

Solución. 2.a) Notemos al dibujarla que esta superficie es un toro (generado exactamente como en el ejercicio 4 con $R_1 = 1$ y $R_2 = 2$), por lo que una parametrización es la dada en ese ejercicio:



$$X(\theta, \phi) = \Big((2 + \cos\phi)\cos\theta, (2 + \cos\phi)\operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\phi\Big)$$



Resolver el 2.b) es obvio, puesto que un toro no contiene ninguna recta (las generatrices de una reglada son rectas), por lo que no puede ser una superficie reglada. También se puede responder tras el apartado 2.d) ya que (como sabemos) encontraremos puntos con curvatura K de Gauss positiva, y esto nunca ocurre en una superficie reglada, donde siempre $K \leq 0$. Por lo tanto no hay que buscar generatrices rectilíneas.

Para el 2.c) hacemos los cálculos:

$$X_\theta = \Big(-(2 + \cos\phi)\operatorname{sen}\theta, (2 + \cos\phi)\cos\theta, 0\Big), \; y \; X_\phi = \Big(-\operatorname{sen}\phi\cos\theta, -\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \cos\phi\Big)$$

de donde obtenemos fácilmente la primera forma fundamental y la función de Gauss :

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+\cos\phi)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad y \;\; N(t,v) = \Big(\cos\theta\cos\phi, \operatorname{sen}\theta\cos\phi, \operatorname{sen}\phi\Big).$$

Finalmente, para resolver el 2.d), calculamos las segundas derivadas y la segunda forma:

$$\begin{aligned} X_{\theta\theta} &= \Big(-(2+\cos\phi)\cos\theta, -(2+\cos\phi)\operatorname{sen}\theta, 0\Big) &\Rightarrow\;& e = \langle N, X_{\theta\theta}\rangle = -(2+\cos\phi)\cos\phi, \\ X_{\phi\phi} &= \Big(-\cos\phi\cos\theta, -\cos\phi\operatorname{sen}\theta, -\operatorname{sen}\phi\Big) &\Rightarrow\;& g = \langle N, X_{\phi\phi}\rangle = -1, \\ X_{\theta\phi} &= \Big(\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, -\operatorname{sen}\phi\cos\theta, 0\Big) &\Rightarrow\;& f = \langle N, X_{\theta\phi}\rangle = 0. \end{aligned}$$

De aquí, se calcula fácilmente la matriz de las curvaturas:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(2+\cos\phi)^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -(2+\cos\phi)\cos\phi & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\cos\phi}{2+\cos\phi} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto (la matriz es diagonal) las curvaturas principales son $k_1 = -1$ y $k_2 = \frac{-\cos\phi}{2+\cos\phi}$. Con esto, la clasificación de cada punto es trivial, ya que $K = K(\theta,\phi) = k_1 k_2 = \frac{\cos\phi}{2+\cos\phi}$, cuyo signo es el de $\cos\phi$. Por lo tanto, en el toro, hay tres tipos de puntos:

$$\begin{aligned} \text{Parabólicos } (K=0) &= \Big\{X(\theta, \frac{\pm\pi}{2}) : \theta\in\mathbb{R}\Big\} = \text{Las circunferencias superior e inferior}, \\ \text{Elípticos } (K>0) &= \Big\{X(\theta,\phi) : \theta\in\mathbb{R}, \phi\in(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\Big\} = \text{la parte de “fuera”}, \\ \text{Hiperbólicos } (K<0) &= \Big\{X(\theta,\phi) : \theta\in\mathbb{R}, \phi\in(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})\Big\} = \text{la parte de “dentro”}. \end{aligned}$$

3. Calcula el centro de masas de la porción de elipsoide (macizo) E y el cascarón S siguientes:

$$E = \{x^2+y^2+4z^2 \le 1, z\ge 0\}, \qquad S = \{x^2+y^2+4z^2 = 1, z \ge 0\},$$

tomando densidades de masa igual a 1.

4. Dados $0 < R_1 < R_2$, consideramos la superficie de revolución que se genera al girar la circunferencia $(x-R_2)^2 + z^2 = R_1^2$ en torno al eje OZ (un $\mathbb{T}$oro). Una parametrización es:

$$\vec{r}(\theta,\phi) = \Big(x(\theta,\phi), y(\theta,\phi), z(\theta,\phi)\Big) = \Big((R_2 + R_1\cos\phi)\cos\theta, (R_2+R_1\cos\phi)\operatorname{sen}\theta, R_1\operatorname{sen}\phi\Big),$$

con parámetros $\theta,\phi\in[0,2\pi)$. Se pide:

a) Calcular el elemento diferencial de superficie $d\vec{S} = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\times\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}\, d\theta d\phi$.

b) Calcular el flujo $\Phi_S(\vec{F}) = \oint\!\!\!\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$ del campo $\vec{F} = (0,0,z)$ a través de la superficie S del toro.

c) Calcula el volumen de dicho toro.

d) Verifica el Teorema de Gauss “flujo-divergencia”:

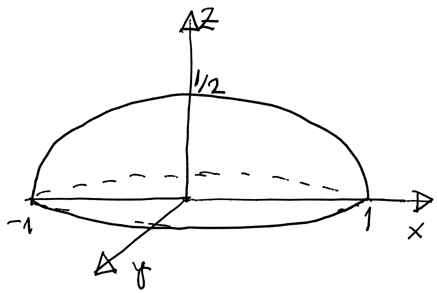
$$\Phi_S(\vec{F}) = \oint\!\!\!\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\, dV,$$

donde $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$ denota la divergencia de $\vec{F}$ y V es el volumen del toro.

Soluciones integración múltiple y Campos.

Título de la nota 12/02/2018

$\boxed{3}$ $x^2+y^2+4z^2=1 \Rightarrow \frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{1^2}+\frac{z^2}{(1/2)^2}=1 \Rightarrow \boxed{r^2+4z^2=1}$



Elipsoide "oblado" de revolución

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

Con semiejes $a=1$, $b=1/2$

Sólo hemisferio norte $z \geq 0$

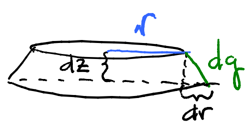
$\boxed{3.1}$ Centro de masas de la figura maziza (densidad 1)

$$\text{Masa} = M \overset{\text{Cilíndricas}}{=} \int_0^{1/2} \pi r^2 \, dz = \int_0^{1/2} \pi(1-4z^2)\,dz = \pi/3$$

$$M z_{c.d.m} = \int_0^{1/2} z\,\pi r^2\,dz = \int_0^{1/2} \pi z(1-4z^2)\,dz = \pi/16$$

$$\left.\right\} z_{c.d.m} = \frac{3}{16}$$

$\boxed{3.2}$ Centro de masas del Cascarón :



Area del tronco de Cono :

$$dA = 2\pi r\,dq = 2\pi r\sqrt{(dr)^2+(dz)^2} =$$

$$= 2\pi r\,dr\sqrt{1+(dz/dr)^2} = 2\pi r\,dz\sqrt{1+(dr/dz)^2}$$

Sea M la masa del Cascarón (la Calcularemos después). Entonces:

$$M z_{c.d.m} = \int z \cdot dA = \int_0^{1/2} z \cdot 2\pi r\,dz\sqrt{1+(dr/dz)^2} = \left| \begin{array}{l} r=\sqrt{1-4z^2} \\ \frac{dr}{dz} = \frac{-4z}{\sqrt{1-4z^2}} \end{array} \right|$$

$$= \int_0^{1/2} z \cdot 2\pi\sqrt{1-4z^2}\sqrt{1+\frac{16z^2}{1-4z^2}}\,dz = \int_0^{1/2} 2\pi z\sqrt{1+12z^2}\,dz =$$

$$= \left| \begin{array}{l} z^2=t \\ 2z\,dz=dt \end{array} \right| = \int_0^{1/4} \pi\sqrt{1+12t}\,dt = \left[\frac{\pi}{18}(1+12t)^{3/2}\right]_0^{1/4} = \frac{7\pi}{18}$$

Por otro lado, la masa del Cascarón se calcula como

$$M = \int dA = \int_0^{1/2} 2\pi\sqrt{1+12z^2}\,dz \leftarrow$$

Quien haya llegado hasta aquí se da por válida la resolución del problema.

Haciendo el Cambio de variable $12z^2 = tg^2(u) \Rightarrow 1+12z^2 = 1+tg^2(u) = sec^2(u)$

Con lo cual $\sqrt{1+12z^2} = \sqrt{1+tg^2(u)} = \sqrt{sec^2(u)} = sec(u)$

Por otra parte $\sqrt{12}\, z = tg(u) \Rightarrow \sqrt{12}\, dz = sec(u)\, du$ Con lo cual

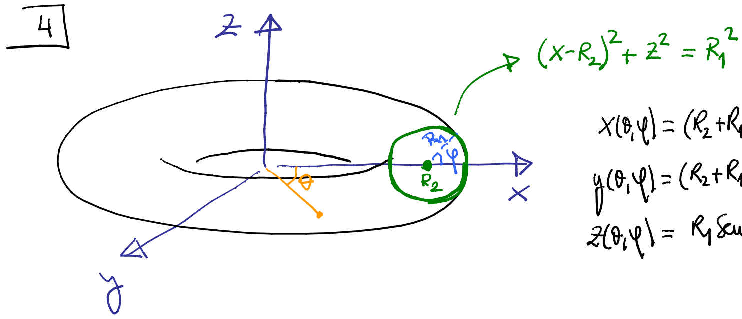
$$M = \int_0^{1/2} 2\pi \sqrt{1+12z^2}\, dz = \int_{u=0}^{u=\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{12}}{2}\right)=u_0} \frac{2\pi}{\sqrt{12}} sec^3(u)\, du = \int_0^{u_0} \frac{2\pi}{\sqrt{12}} \frac{Cos(u)\, du}{Cos^4(u)} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} V = Sen(u) \\ dV = Cos(u)\, du \\ Cos^2(u) = 1 - Sen^2(u) \end{array} \right| = \frac{2\pi}{\sqrt{12}} \int_0^{Sen(u_0)} \frac{dV}{(1-V^2)^4} \overset{\text{fracciones simples}}{=} \frac{2\pi}{\sqrt{12}} \left[\frac{V/6}{(1-V^2)^3} + \frac{5V/24}{(1-V^2)^2} \right.$$

$$\left. + \frac{5V/16}{(1-V^2)} + \frac{5}{32} \log\left(\frac{1+V}{1-V}\right) \right]_0^{Sen(u_0)} = \frac{\pi}{12}\left(12 - \sqrt{3}\log(3) + 2\sqrt{3}\log(3+2\sqrt{3})\right) \simeq 4'336$$

Finalmente $z_{c.d.m} \simeq \dfrac{7\pi/18}{4'336} \simeq 0'282$

$\boxed{4}$



$$\left.\begin{array}{l} x(\theta,\varphi) = (R_2 + R_1 Cos\varphi)\, Cos\theta \\ y(\theta,\varphi) = (R_2 + R_1 Cos\varphi)\, Sen\theta \\ z(\theta,\varphi) = R_1 Sen\varphi \end{array}\right\} \vec{r}(\theta,\varphi)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \left(-(R_2 + R_1 Cos\varphi)Sen\theta,\ (R_2 + R_1 Cos\varphi)Cos\theta,\ 0\right)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \left(-R_1 Sen\varphi\, Cos\theta,\ -R_1 Sen\varphi\, Sen\theta,\ R_1 Cos\varphi\right)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -(R_2+R_1Cos\varphi)Sen\theta & (R_2+R_1Cos\varphi)Cos\theta & 0 \\ -R_1 Sen\varphi\, Cos\theta & -R_1 Sen\varphi\, Sen\theta & R_1 Cos\varphi \end{vmatrix} =$$

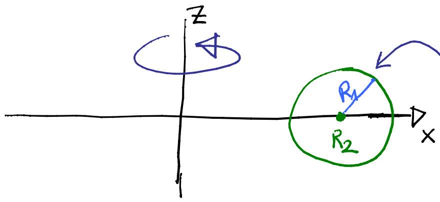
$$= (R_2 + R_1 Cos\varphi)\left(R_1 Cos\varphi\, Cos\theta,\ R_1 Cos\varphi\, Sen\theta,\ R_1 Sen\varphi\right)$$

$$d\vec{s} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\, d\theta\, d\varphi \quad , \quad \vec{F} = (0,0,z) = (0,0,R_1 Sen\varphi)$$

$$\oiint \vec{F}\cdot d\vec{s} = \oiint z\, dS_z = \iint R_1 Sen\varphi\,(R_2 + R_1 Cos\varphi)\, R_1 Sen\varphi\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \left\{ \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(R_1^2 R_2 Sen^2\varphi + R_1^3 Sen^2\varphi\, Cos\varphi\right) d\varphi \right\} = 2\pi \left(\int_0^{2\pi} \left(R_1^2 R_2 \frac{1 - \cancelto{0}{Cos 2\varphi}}{2} + \cancelto{0}{R_1^3 Sen^2\varphi\, d\, Sen\varphi}\right) d\varphi \right)$$

$$= 2\pi R_1^2 R_2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\varphi = 2\pi^2 R_1^2 R_2$$



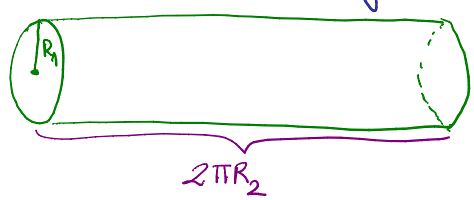
$$z^2 + (x-R_2)^2 = R_1^2 \Rightarrow$$

$$z = \sqrt{R_1^2 - (x-R_2)^2} \quad \text{hemisferio norte}$$

El volumen del toro se puede calcular de varias formas. Por ejemplo, usando que se trata de una figura de revolución:

$$V = 2\int_{z=0}^{z=R_1} \pi x^2\, dz = 2\int_{x=R_2-R_1}^{x=R_2+R_1} \pi x^2 \left|\frac{dz}{dx}\right| dx = 2\int_{R_2-R_1}^{R_2+R_1} \pi x^2 \frac{(x-R_2)}{\sqrt{R_1^2-(x-R_2)^2}} = 2\pi^2 R_1^2 R_2$$

Otra forma, más fácil quizás, es cortando el toro a $\theta =$ constante hasta conseguir un cilindro



$$V = \pi R_1^2 \cdot 2\pi R_2 = 2\pi^2 R_1^2 R_2$$

El teorema de Gauss dice que $\oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\, dV$

Como $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0+0+1 = 1$ se tiene que:

$$\iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\, dV = \iiint dV = V = 2\pi^2 R_1^2 R_2$$

que coincide con el flujo $\oiint \vec{F}\cdot d\vec{s}$ calculado anteriormente