Universidad de Granada | **Ejercicios** | AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS II
Dept. Matemática Aplicada | (Actualizado 2 de noviembre de 2017) | GRADO INGENIERÍA CIVIL

Universidad de Granada | **Ejercicios** | AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS II
Dept. Matemática Aplicada | (Actualizado 2 de noviembre de 2017) | GRADO INGENIERÍA CIVIL

EJERCICIOS DE SUPERFICIES

S.1. Cálculo del plano tangente en dos casos destacados.

1a) Dada una superficie regular de la forma $S = F^{-1}$(valor regular), prueba que la ecuación implícita del plano tangente en un punto $(x_0, y_0, z_0) \in S$ es:

$$(x - x_0)F_x(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)F_y(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)F_z(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

1b) Dada una superficie regular de tipo grafo: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$, prueba que la ecuación implícita del plano tangente en un punto $(x_0, y_0, z_0) \in S$ es:

$$z = \overbrace{f(x_0, y_0)}^{=z_0} + (x - x_0)f_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f_y(x_0, y_0).$$

$\boxed{1}$ En general, la **ecuación de un plano** que pasa por un punto (x_0, y_0, z_0) se suele obtener de dos modos:

$$\text{si tenemos un vector perpendicular } n \;\Rightarrow\; \text{ecuación: } \quad n \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0,$$

$$\text{si tenemos 2 vectores directores } \begin{cases} u = (u_1, u_2, u_3) \\ v = (v_1, v_2, v_3) \end{cases} \;\Rightarrow\; \text{ecuación: } det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Para resolver el $\boxed{1a}$ usamos la primera fórmula ya que **sabemos que el vector gradiente de F siempre es un vector perpendicular al plano tangente**. Por lo tanto, sólo hemos de recordar la fórmula del vector gradiente en cualquier punto:

$$\nabla F = (F_x, F_y, F_z) \overset{\text{ó}}{=} \Big(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\Big).$$

Para resolver el $\boxed{1a}$ usamos la segunda fórmula. Eligiendo la parametrización usual $X(x, y) = (x, y, f(x, y))$, **sabemos que dos vectores directores del plano tangente son** $X_x = (1, 0, f_x)$ y $X_y = (0, 1, f_y)$. Por lo tanto, la ecuación queda

$$0 = det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & f_x(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} = -(x - x_0)f_y - (y - y_0)f_x + (z - z_0),$$

que, despejando z, es la ecuación buscada.

S.2. Halla una parametrización de la esfera de radio r, como rotación de la curva $\alpha(\theta) = (0, r\,\mathrm{sen}(\theta), r\cos(\theta))$, con $\theta \in (0, \pi)$, en torno al eje OZ. ¿Reconoces el resultado?

$\boxed{2}$ En general, al rotar una curva $\alpha(t) = (0, f(t), g(t))$ (con $f > 0$) en torno al eje OZ, obtenemos

$$X(t, \varphi) = (\cos(\varphi)f(t), \mathrm{sen}(\varphi)f(t), g(t)), \varphi \in (0, 2\pi)$$

En este caso, obtenemos

$$X(\theta, \varphi) = (r\cos(\varphi)\,\mathrm{sen}(\theta), r\,\mathrm{sen}(\varphi)\,\mathrm{sen}(\theta), r\cos(\theta)),\;\; \theta \in (0, \pi), \quad \varphi \in (0, 2\pi).$$

que no son más que las **coordenadas esféricas** (r = radio, θ = colatitud o ángulo medido desde el polo norte, y φ = azimut o ángulo desde un meridiano de referencia).

S.3. Calcula la ecuación de la superficie cilíndrica con directriz la elipse $\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 1 = 0, \\ x - z = 0, \end{cases}$ y con generatrices en la dirección del vector $w = (1, 0, -1)$.

$\boxed{3}$ En este caso (recordamos el ejercicio de curvas **??**) es trivial parametrizar la elipse directriz como

$$\alpha(t) = (\cos(t), \frac{\operatorname{sen}(t)}{2}, \cos(t)),$$

y por lo tanto, parametrizar el cilindro como

$$X(u, v) = \alpha(u) + vw = \Big(\cos(u) + v, \frac{1}{2}\operatorname{sen}(u), \cos(u) - v\Big)$$

Para hallar la ecuación implícita, hay que eliminar los parámetros u y v (a ojo):

$$\left.\begin{array}{l} x = \cos(u) + v \\ y = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(u) \\ z = \cos(u) - v \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + z = 2\cos(u) \\ y = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(u) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}(x + z) = \cos(u) \\ 2y = \operatorname{sen}(u) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{4}(x + z)^2 + 4y^2 = 1.$$

S.4. Calcula la ecuación del cono con directriz la elipse $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 4, \end{cases}$ y vértice en $P = (1, 1, 1)$.

$\boxed{4}$ De nuevo, comenzamos por parametrizar la directriz fácilmente: $\alpha(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), 4)$, y, por lo tanto, parametrizar el cono como

$$X(u, v) = \alpha(u) + v(P - \alpha(u)) = \Big((1 - v)\cos(u) + v, (1 - v)\operatorname{sen}(u) + v, 4 - 3v\Big)$$

Para hallar la ecuación implícita, de nuevo hay que eliminar los parámetros u y v:

$$\left.\begin{array}{l} x = (1 - v)\cos(u) + v \\ y = (1 - v)\operatorname{sen}(u) + v \\ z = 4 - 3v \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (x - v)^2 + (y - v)^2 = (1 - v)^2 \\ \frac{1}{3}(z - 4) = v \end{array}\right\} \Rightarrow (3x - z + 4)^2 + (3y - z + 4)^2 - (z - 7)^2 = 0.$$

S.5. Justifica razonadamenbte si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

5*a*) En una superficie que sea un grafo de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivable, todo punto con curvatura media nula y curvatura de Gauss no nula, resulta ser hiperbólico.

5*b*) En una superficie regular S, todo punto umbilical es elíptico.

5*c*) En una superficie que sea $S = F^{-1}(a)$ (imagen inversa de un valor regular a mediante una función derivable $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ derivable), todo punto con curvatura media nula y curvatura de Gauss no nula, resulta ser hiperbólico.

$\boxed{5a}$ Si la curvatura media $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ es nula, entonces las curvaturas principales tienen signos opuestos (o son ambas cero): $k_1 = -k_2$ en todo caso. Como la de Gauss es $K = k_1k_2$ y, en este caso $K = -(k_2)^2 \leq 0$ y el enunciado dice que no es nula, entonces $K < 0$ y la afirmación es cierta.

$\boxed{5b}$ En un punto umbilical las dos curvaturas principales son iguales: $k_1 = k_2 = k$, y, por lo tanto, la curvatura de Gauss será $K = k_1k_2 = k^2 \geq 0$. Pero para que sea elíptico hace falta que $K > 0$, es decir, que $k \neq 0$, por lo que la afirmación es, en general, falsa, ya que fallaría en puntos con $k_1 = k_2 = 0$ (puntos planos).

$\boxed{5c}$ Igual que el $5a$; el tipo de superficie es irrelevante en lo que respecta a esta pregunta.

S.6. Dada una función $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ y positiva, considera la superficie de revolución que se obtiene al girar la curva plana

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 2 + f(x), \ y = 0\}$$

respecto del ele OX, siendo f una función positiva y $C^{\infty}(\mathbb{R})$.

6a) Determina una parametrización de dicha superficie.

6b) Prueba que una de las curvaturas principales tiene signo constante en toda la superficie.

6c) Da un ejemplo concreto de función f tal que la superficie de revolución generada tenga tanto puntos elípticos como hiperbólicos pero que no contenga puntos planos.

$\boxed{32a}$ La parametrización más simple es: $\boxed{X(u, \theta) = \Big(u, (2 + f(u)) \cos(\theta), (2 + f(u)) \operatorname{sen}(\theta)\Big)}$.

Para responder a $\boxed{32b}$ calculamos primero la base del plano tangente:

$$X_u = \Big(1, f'(u) \cos(\theta), f'(u) \operatorname{sen}(\theta)\Big), \quad X_\theta = \Big(0, -(2 + f(u)) \operatorname{sen}(\theta), (2 + f(u)) \cos(\theta)\Big).$$

de donde obtenemos rápidamente la matriz de la primera forma fundamental y el normal:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + f'(u)^2 & 0 \\ 0 & (1 + f(u))^2 \end{pmatrix}, \qquad y \ \ N(u, \theta) = \frac{\Big(f'(u), -\cos(\theta), -\operatorname{sen}(\theta)\Big)}{\sqrt{1 + f'(u)^2}}.$$

Para la segunda forma, calculamos las segundas derivadas

$$X_{uu} = \Big(0, f''(u) \cos(\theta), f''(u) \operatorname{sen}(\theta)\Big), \quad X_{\theta\theta} = -\Big(0, (2 + f(u)) \cos(\theta), (2 + f(u)) \operatorname{sen}(\theta)\Big),$$

$$y \qquad X_{u\theta} = X_{\theta u} = \Big(0, -f'(u) \operatorname{sen}(\theta), f'(u) \cos(\theta), 0\Big),$$

de donde

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(u)^2}} \begin{pmatrix} -f''(u) & 0 \\ 0 & (2 + f(u)) \end{pmatrix},$$

lo que nos permite fácilmente (puesto que ambas matrices **son diagonales**) obtener la matriz y las curvaturas principales sin apenas hacer operaciones:

$$matriz = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{e}{E} & 0 \\ 0 & \dfrac{g}{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-f''(u)}{\left(1+f'(u)^2\right)^{3/2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(2+f(u))\sqrt{1+f'(u)^2}} \end{pmatrix}$$

siendo k_1 y k_2 los elementos que aparecen en la diagonal:

$$k_1 = \frac{-f''(u)}{\left(1 + f'(u)^2\right)^{3/2}}, \qquad k_2 = \frac{1}{(2 + f(u))\sqrt{1 + f'(u)^2}}.$$

Con esto respondemos el apartado $\boxed{32b}$, ya que k_2 es claramente una función que no cambia de signo (es siempre positiva por serlo $(2 + f(z))$ y $\sqrt{1 + f'(z)^2}$).

El apartado $\boxed{6c}$ es de libre elección, pero mirando la expresión de k_1, es obvio que cualquier función tal que $f''(x)$ cambie de signo valdrá, puesto que producirá puntos elípticos (cuando $f'' < 0$), e hiperbólicos (cuando $f'' > 0$) y nunca habrá planos, puesto que ya hemos visto que k_2 no se anula nunca. Por lo tanto tomamos por ejemplo $f(x) = 1 + \operatorname{sen}(x)$, que cumple todo lo necesario, es $f \geq 0$ y f'' cambia de signo.

S.7. Considera la superficie de revolución que se obtiene al girar la curva plana

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y = f(z), \ x = 0\}$$

respecto del ele OZ, siendo f una función positiva y $C^\infty(\mathbb{R})$.

7*a*) Determina una parametrización de dicha superficie.

7*b*) Demuestra que una de sus curvaturas principales tiene el mismo signo en todos los puntos.

7*c*) Da un ejemplo de función f para la cual la superficie contenga puntos parabólicos, hiperbólicos, elípticos y umbilicales, y determina un ejemplo de cada uno.

$\boxed{7a}$ La parametrización más simple es: $\boxed{X(z,\theta) = \Big(f(z)\cos(\theta), f(z)\,\mathrm{sen}(\theta), z\Big)}$ ya que se trata de hacer, para cada altura z, circunferencias en el plano OXY de radio $f(z)$. Para responder a $\boxed{7b}$ calculamos primero la base del plano tangente:

$$X_z = \Big(f'(z)\cos(\theta), f'(z)\,\mathrm{sen}(\theta), 1\Big), \quad X_\theta = \Big(-f(z)\,\mathrm{sen}(\theta), f(z)\cos(\theta), 0\Big).$$

de donde obtenemos rápidamente la matriz de la primera forma fundamental y el normal:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + f'(z)^2 & 0 \\ 0 & f(z)^2 \end{pmatrix}, \qquad y \ \ N(z,\theta) = \frac{\Big(-\cos(\theta), -\,\mathrm{sen}(\theta), f'(z)\Big)}{\sqrt{1 + f'(z)^2}}.$$

Para la segunda forma, calculamos las segundas derivadas

$$X_{zz} = \Big(f''(z)\cos(\theta), f''(z)\,\mathrm{sen}(\theta), 0\Big), \quad X_{\theta\theta} = -\Big(f(z)\cos(\theta), f(z)\,\mathrm{sen}(\theta), 0\Big),$$

$$y \qquad X_{z\theta} = X_{\theta z} = \Big(-f'(z)\,\mathrm{sen}(\theta), f'(z)\cos(\theta), 0\Big),$$

de donde

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(z)^2}} \begin{pmatrix} -f''(z) & 0 \\ 0 & f(z) \end{pmatrix},$$

lo que nos permite fácilmente (puesto que ambas matrices **son diagonales**) obtener la matriz y las curvaturas principales sin apenas hacer operaciones:

$$matriz = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{e}{E} & 0 \\ 0 & \dfrac{g}{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-f''(z)}{\left(1+f'(z)^2\right)^{3/2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{f(z)\sqrt{1+f'(z)^2}} \end{pmatrix}$$

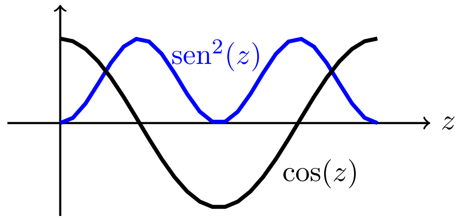
siendo k_1 y k_2 los elementos que aparecen en la diagonal:

$$k_1 = \frac{-f''(z)}{\left(1 + f'(z)^2\right)^{3/2}}, \qquad k_2 = \frac{1}{f(z)\sqrt{1 + f'(z)^2}}.$$

Con esto respondemos el apartado 7*b*, ya que k_2 es claramente una función que no cambia de signo (es siempre positiva por serlo $f(z)$ y $\sqrt{1 + f'(z)^2}$).

El apartado $\boxed{7c}$ es de libre elección, pero mirando la expresión de k_1, es obvio que cualquier función tal que $f''(z)$ cambie de signo, producirá puntos elípticos (cuando $f'' < 0$), hiperbólicos (cuando $f'' > 0$) y parabólicos (cuando $f'' = 0$). Para lo único que se requiere un poquito de cuidado, es para que haya puntos umbilicales. En este caso, probamos con una de las más simples que se nos ocurren cumpliendo todo lo requerido $f > 0$ y f'' cambiando de signo: $f(z) = 2 - \cos(z)$. Veamos que produce puntos umbilicales:

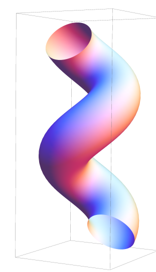
$$k_1 = k_2 \Leftrightarrow -f(z)f''(z) = (1 + f'(z)^2) \Leftrightarrow \cos(z) = \mathrm{sen}^2(z),$$



que tiene infinitas soluciones (aunque no podamos resolverla explícitamente, podemos saberlo dibujando aproximadamente sus gráficas).

S.8. Dada una curva $\alpha(t)$ con triedro de Frenet T, N y B y un número $r > 0$ que sea menor que el radio de curvatura de α en cada punto, se define la superficie tubular de radio r en torno a α como aquella de parametrización:

$$X(t,\theta) := \alpha(t) + r\cos(\theta)N(t) + r\operatorname{sen}(t)B(t).$$



Considera la superficie tubular generada al construir un tubo de radio $r = 1$ en torno a la hélice $\alpha(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$.

8*a*) Clasifica el punto $P = (0, 0, \pi)$ y determina los vectores de $\mathbb{R}^3$ que determinan las direcciones principales en dicho punto.

8*b*) Calcula, si las hay, las direcciones asintóticas en P.

$\boxed{33a}$ Calculamos los elementos de α que necesitamos, es decir, el triedro de Frenet:

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 1\Big), \quad N(t) = (-\cos(t), -\operatorname{sen}(t), 0), \quad y \quad B(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\operatorname{sen}(t), -\cos(t), 1\Big).$$

Por lo tanto la parametrización de la superficie tubular es (con $r = 1$):

$$X(t,\theta) \quad = \Big(\cos(t) - \cos(t)\cos(\theta) + \tfrac{\operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(\theta)}{\sqrt{2}}, \operatorname{sen}(t) - \cos(\theta)\operatorname{sen}(t) - \tfrac{\cos(t)\operatorname{sen}(\theta)}{\sqrt{2}}, t + \tfrac{\operatorname{sen}(\theta)}{\sqrt{2}}\Big).$$

Notamos que $P = X(\pi, 0) = (0, 0, \pi)$, por lo que todo el ejercicio se hace en las coordenadas $(\pi, 0)$. Primero, derivando una vez, obtenemos los vectores base del plano tangente:

$$X_t(\pi, 0) = (0, 0, 1), \quad X_\theta(\pi, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1).$$

Por lo tanto, la matriz de la primera forma y el normal son, respectivamente:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}, \qquad y \;\; N(\pi, 0) = \frac{X_t \times X_\theta}{|X_t \times X_\theta|} = (-1, 0, 0).$$

Nótese que, como las dos últimas componentes de N son 0, los cálculos de e, f y g son más simples, pues sólo necesitamos las primeras componentes de X_{tt}, $X_{\theta\theta}$ y $X_{t\theta}$. Obtendremos

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Como el signo de la curvatura de Gauss es el mismo que el del determinante de esta última matriz (que vale $\det = -\frac{1}{2} < 0$), obtenemos que el punto P es hiperbólico. No obstante, calculamos la matriz para responder al resto de preguntas:

$$matriz = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix},$$

Ahora se obtienen fácilmente las curvaturas principales $\{k_1, k_2\} = \{-1, 1\}$ y sus direcciones principales (en coordenadas respecto de X_t y X_θ) en dicho punto:

$$v_1 = (-2, \sqrt{2}), \quad y \quad v_2 = (0, \sqrt{2})$$

y, por lo tanto

$$v_1 = -2X_t + \sqrt{2}X_\theta = (0, 1, -1) \quad y \quad v_2 = 0X_t + \sqrt{2}X_\theta = (0, 1, 1), .$$

$\boxed{33b}$ A partir de los datos obtenidos, y observando que, en coordenadas,

$$v = aX_t + bX_\theta, \qquad II_p(v) = (a, b)\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = b\,(b + a\sqrt{2})$$

resolviendo $II_p(v) = 0$ (obtenemos $b = 0$ ó $b = -a\sqrt{2}$), obtenemos las direcciones asintóticas (en coordenadas):

$$w_1 = (1, 0), \quad y \quad w_2 = (1, -\sqrt{2}).$$

S.9. Considera la superficie: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 9x^2 - 4y^2 = z\}$

9a) Prueba que es regular y reglada.

9b) Clasifica el punto $P = (1, 1, 5)$ y determina los vectores de $\mathbb{R}^3$ que determinan las direcciones principales en dicho punto.

9c) Calcula, si las hay, las direcciones asintóticas en P.

S.10. Considera la curva $\alpha(t) = (\operatorname{sen}(t), 2t, \cos(t))$.

10a) Calcula el triedro de Frenet en cada punto y determina una parametrización de la superficie tubular[a] generada al construir un tubo de radio $r = 1$ en torno a dicha curva.

10b) Clasifica el punto $P = (0, \pi, 0)$ de dicha superficie y calcula los vectores de $\mathbb{R}^3$ que determinan las direcciones principales en él.

10c) Calcula, si las hay, las direcciones asintóticas en P.

[a]Véase el ejercicio 8.

$\boxed{34a}$ Calculamos triedro de Frenet:

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\cos(t), 2, -\operatorname{sen}(t)\Big), \quad N(t) = (-\operatorname{sen}(t), 0, -\cos(t)), \quad y \quad B(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(-2\cos(t), 1, 2\operatorname{sen}(t)\Big).$$

Por lo tanto la parametrización de la superficie tubular es (con $r = 1$):

$$\begin{aligned} X(t, \theta) &= \alpha(t) + r\cos(\theta)N(t) + r\operatorname{sen}(\theta)B(t) \\ &= \Big(\operatorname{sen}(t) - \cos(\theta)\operatorname{sen}(t) - \frac{2\cos(t)\operatorname{sen}(\theta)}{\sqrt{5}},\ 2t + \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\sqrt{5}},\ \cos(t) - \cos(t)\cos(\theta) + \frac{2\operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(\theta)}{\sqrt{5}}\Big). \end{aligned}$$

$\boxed{34b}$ Notamos que $P = X(\pi/2, 0) = (0, \pi, 0)$, por lo que todo el ejercicio se hace en las coordenadas $(\pi/2, 0)$. Primero, derivando una vez, obtenemos los vectores base del plano tangente:

$$X_t(\pi/2, 0) = (0, 2, 0), \quad X_\theta(\pi/2, 0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, 2).$$

Por lo tanto, la matriz de la primera forma y el normal son, respectivamente:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 1 \end{pmatrix}, \qquad y \quad N(\pi, 0) = \frac{X_t \times X_\theta}{|X_t \times X_\theta|} = (1, 0, 0).$$

Nótese que, como las dos últimas componentes de N son 0, los cálculos de e, f y g son más simples, pues sólo necesitamos las primeras componentes de X_{tt}, $X_{\theta\theta}$ y $X_{t\theta}$. Obtendremos

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{y, de camino:} \quad \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{16/5} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & 4 \end{pmatrix}$$

Como $K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = \frac{-4/5}{16/5} = \frac{-1}{4}$, obtenemos que el punto P es hiperbólico. No obstante, calculamos la matriz para responder al resto de preguntas:

$$matriz = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

Al ser triangular, las curvaturas principales son los números de la diagonal: $k_1 = 1$ y $k_2 - 1/4$, y las direcciones principales (en coordenadas respecto de X_t y X_θ) en dicho punto, los valores propios:

$$v_1 = (0, -\sqrt{5}), \quad y \quad v_2 = (\sqrt{5}, -2)$$

y, por lo tanto: $\quad v_1 = 0X_t - \sqrt{5}X_\theta = -(0,1,2), \quad y \quad v_2 = \sqrt{5}X_t - 2X_\theta = (0, 2\sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-4}{\sqrt{5}}).$

$\boxed{34c}$ A partir de los datos obtenidos, y observando que, en coordenadas,

$$v = aX_t + bX_\theta, \quad II_p(v) = (a,b) \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = b\,(b + 4a/\sqrt{5})$$

y resolviendo $II_p(v) = 0$ (obtenemos $b = 0$ ó $b = -4a/\sqrt{5}$), obtenemos las direcciones asintóticas (en coordenadas):

$$w_1 = (1,0), \quad y \quad w_2 = (\sqrt{5}, -4).$$

S.11. Determina la superficie reglada (helicoide) que se apoya en la hélice directriz $\alpha(t) = (a\cos(t), a\,\text{sen}(t), bt)$ $(a, b > 0)$ y cuyas generatrices son perpendiculares al eje OZ.
¿Es desarrollable o alabeada? Calcula, según lo obtenido, su arista de retroceso o su línea de estricción.

S.12. Dada la superficie $S = \left\{ \left(2a\,u\cos(v), 2b\,u\,\text{sen}(v), 2u^2(a\cos^2(v) + b\,\text{sen}^2(v))\right) : u \in \mathbb{R}, v \in [0, 2\pi] \right\}$, con $a, b > 0$, calcula la ecuación implícita de S.

$\boxed{12}$ Ya sabemos que habiendo senos y cosenos, hay que buscar fórmulas básicas, aunque en este caso, tal vez sea aún más simple:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2a\,u\cos(v) \\ y = 2b\,u\,\text{sen}(v) \\ z = 2u^2(a\cos^2(v) + b\,\text{sen}^2(v)) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 = 4a^2\,u^2\cos^2(v) \\ y^2 = 4b^2\,u^2\,\text{sen}^2(v) \\ 2z = 4u^2(a\cos^2(v) + b\,\text{sen}^2(v)) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z,$$

o sea, que estamos ante un paraboloide elíptico.

S.13. Dada la superficie $S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2/9 = y^2/4 + 1 \right\}$:

13a) Comprueba que es una superficie regular.

13b) Halla el plano tangente en $(1,2,3)$.

13c) Como es un hiperboloide, determina la recta generatriz que pasa por $(1,2,3)$

$\boxed{13a}$ Hay que verla como F^{-1}(valor regular), siendo $F(x,y,z) = x^2 + z^2/9 - y^2/4 - 1$.

$\boxed{13b}$ Recordamos (ejercicio 1) que $\nabla F(1,2,3)$ es un vector normal al plano tangente, y $\nabla F = (2x, -y/2, 2z/0)$, en el punto queda,

$$\nabla F(1,2,3) = (2,-1,\frac{2}{3}), \Rightarrow T_{(1,2,3)}(S) \equiv 2(x-1)-(y-2)+\frac{2}{3}(z-3) = 0 \Leftrightarrow 6x-3y+2z=6.$$

$\boxed{13c}$ Basta jugar un poco con la ecuación implícita y recordar que la recta generatriz está contenida en el plano tangente.

$$x^2+\frac{z^2}{9} = \frac{y^2}{4}+1 \Leftrightarrow x^2-\frac{y^2}{4} = 1-\frac{z^2}{9} \Leftrightarrow \Big(x+\frac{y}{2}\Big)\Big(x-\frac{y}{2}\Big) = \Big(1+\frac{z}{3}\Big)\Big(1-\frac{z}{3}\Big),$$

Ahora, como debe quedar dentro del plano tangente, $6x-3y+2z=6$ o, despejando: $x-y/2 = 1-z/3$, lo que cancela dos términos en la última igualdad, quedando el otro $x+y/2 = 1+z/3$. La generatriz resulta ser:

$$\left.\begin{array}{l} 6x-3y+2z=6 \\ 6x+3y-2z=6 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=1 \\ 3y+2z=0 \end{array}\right\}.$$

S.14. La superficie $S = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2-4y^2+z^2=0\Big\}$, ¿es reglada? En caso afirmativo, calcula una familia de generatrices rectilíneas y su arista de retroceso o su línea de estricción según proceda.

$\boxed{14}$ Primero notamos que es un cono en torno al eje OU y con foco en el orígen; tal vez se vea mejor al reescribir su ecuación como $4y^2 = x^2+z^2$. Así, por ejemplo, al cortar con el plano $y=1$, obtenemos la circunferencia $4 = x^2+z^2$ que nos puede servir de directriz y dar la parametrización X:

$$\alpha(u) = (2\cos(u),1,2\,\mathrm{sen}(u)), \quad X(u,v) = \alpha(t)+v(\alpha(t)-0) = (2\cos(u)(1+v),1+v,2\,\mathrm{sen}(u)(1+v)).$$

Si queremos la familia de generatrices rectilíneas (que no es más que una para cada valor de u en la parametrización X) podemos darlas también en implícitas, eliminando v:

$$\begin{aligned} \textit{generatrices} &= \Big\{\Big\{x = 2\cos(u)(1+v),\ y=1+v,\ z=2\,\mathrm{sen}(u)(1+v)\ : v\in\mathbb{R}\Big\} :\ u\in(0,2\pi)\Big\} \\ &= \Big\{x = 2\cos(u)y,\ z = 2\,\mathrm{sen}(u)y\ : u\in(0,2\pi)\Big\}. \end{aligned}$$

Para acabar, sabemos que su único punto crítico, arista de retroceso en este caso, es el foco $(0,0,0)$.

S.15. La superficie $S = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 4x^2+4(y-1)^2-(z-1)^2 = 0\Big\}$, ¿es reglada? En caso afirmativo, calcula una familia de generatrices rectilíneas y su arista de retroceso o su línea de estricción según proceda.

$\boxed{15}$ Análogo al 14, es un cono aunque con foco en $(0,1,1)$ y en torno al eje OZ. Así, por ejemplo, al cortar con el plano $z=3$, obtenemos $1 = x^2+(y-1)^2$ y la parametrización:

$$\alpha(u) = (\cos(u),\mathrm{sen}(u)+1,3), \quad X(u,v) = \alpha(t)+v(\alpha(t)-(0,1,1)) = (\cos(u)(1+v),\mathrm{sen}(u)(1+v)+1,3+2v).$$

Ahora la familia de generatrices rectilíneas es:

$$\begin{aligned} \textit{generatrices} &= \Big\{\Big\{x=\cos(u)(1+v),\ y=\mathrm{sen}(u)(1+v)+1, z=3+2v : v\in\mathbb{R}\Big\} :\ u\in(0,2\pi)\Big\} \\ &= \Big\{2x = \cos(u)(z-1),\ 2y = \mathrm{sen}(u)(z-1)+1\ : u\in(0,2\pi)\Big\}. \end{aligned}$$

Para acabar, sabemos que su único punto crítico, arista de retroceso en este caso, es el foco $(0,1,1) = X(u,-1)$. Si alguien lo duda, basta calcular:

$$X_u \times X_v = (2(1+v)\cos(u), 2(1+v)\,\mathrm{sen}(u), -(1+v)).$$

S.16. Parametriza S generada por las rectas que pasan por el punto $P = (0, 1, 1)$ y son incidentes con la curva $C = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y-1)^2 = 1,\ z = -1\Big\}$.

$\boxed{16}$ Es, por definición, un cono con la circunferencia C como curva generatriz y foco en P. Parametrizamos pues, primero C y después S.

$\alpha(t) = (\cos(t), 1 + \operatorname{sen}(t), -1), \quad X(t, v) = \alpha(t) + v(P - \alpha(t)) = (\cos(t)(1-v), \operatorname{sen}(t)(1-v) + 2v + 1, 2v - 1).$

S.17. Halla la ecuación del cono que proyecta la curva $C = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2,\ z = 1\Big\}$ desde el origen de coordenadas.

$\boxed{17}$ De nuevo, parametrizamos primero C y después S:

$$\alpha(u) = (r\cos(u), r\operatorname{sen}(u), 1), \quad X(u, v) = \alpha(t) + v(P - \alpha(t)) = (r\cos(t)(1-v), r\operatorname{sen}(t)(1-v), 1-v),$$

y buscamos de nuevo fórmulas básicas:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos(t)(1-v) \\ y = r\operatorname{sen}(t)(1-v) \\ z = 1 - v \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 = r^2\cos^2(t)(1-v)^2 \\ y^2 = r^2\operatorname{sen}^2(t)(1-v)^2 \\ r^2z^2 = r^2(1-v)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2z^2.$$

S.18. Considera la superficie S engendrada por las rectas $\Big\{x = a\,z + a^2,\ y = a^2z + a :\ a \in \mathbb{R}\Big\}$.

18*a*) Da una parametrización reglada de la misma.

18*b*) Calcula el plano tangente en un punto cualquiera.

18*c*) Determina la superficie generada por las rectas que pasan por el orígen y son tangentes a S.

$\boxed{18a}$ Tal y como nos dan las rectas, dependientes de un parámetro a, parece lógico tomar a como uno de los parámetros, es decir, $u = a$, y, para que nos salga reglada directamente, tomaremos como v el que queda libre en cada recta, en este caso se puede tomar $z = v$. Por lo tanto:

$$X(u, v) = \begin{pmatrix} u\,v + u^2 \\ u^2v + u \\ v \end{pmatrix} = \overbrace{(u^2, u, 0)}^{\alpha(u)} + v\,\overbrace{(u, u^2, 1)}^{\mathrm{w}(u)}.$$

$\boxed{18b}$ Calculamos los vectores directores y (recordamos el ejercicio 1) la ecuación del plano tangente:

$$\left\{\begin{array}{l} X_u = (v + 2u, 2uv + 1, 0) \\ X_v = (u, u^2, 1) \end{array}\right. \Rightarrow T_p(S) \equiv 0 = det\begin{pmatrix} x - (u\,v + u^2) & y - (u^2v + u) & z - v \\ v + 2u & 2uv + 1 & 0 \\ u & u^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta expresión no se simplifica demasiado: $(x - vy - 2u^3(v - z) + u(v + 2vx - 2y - z) + u^2(1 - vz) = 0$.

$\boxed{18c}$ Se trata de encontrar los puntos de S para los cuales el $(0, 0, 0)$ está en el plano tangente, pues sólo así, la recta que pasa por $(0, 0, 0)$ (¡y por el punto!) será tangente. Por lo tanto, sustituimos (x, y, z) por $(0, 0, 0)$ en la ecuación anterior, quedando $-2u^3v + uv + u^2 = 0$, con lo que se puede despejar v en función de u:

$$v = \frac{u}{2u^2 - 1}.$$

Con todo esto, la superficie pedida es, obviamente, el cono con foco en el orígen y de curva directriz

$$\alpha(u) = X\Big(u, \frac{u}{2u^2-1}\Big) = \Big(\frac{u^2}{2u^2-1}+u^2, \frac{u^3}{2u^2-1}+u, \frac{u}{2u^2-1}\Big) = \Big(\frac{2u^4}{2u^2-1}, \frac{3u^3-u}{2u^2-1}, \frac{u}{2u^2-1}\Big).$$

S.19. Considera la superficie S engendrada por las rectas $\Big\{x = az+2ag(a)-f(a),\ y = zf(a)+a\,g^2(a):\ a\in\mathbb{R}\Big\}$ siendo f y g funciones regulares.

19*a*) Da condiciones sobre f y g para que S sea desarrollable.

19*b*) Determina que hay dos tipos distintos de superficies desarrollables de este tipo.

$\boxed{19}$ Por analogía con el ejercicio 18, procedemos igual:

$$X(u,v) = \overbrace{(2ug(u)-f(u), u\,g^2(u), 0)}^{\alpha(u)} + v\,\overbrace{(u, f(u), 1)}^{\mathrm{w}(u)}.$$

Para ver cuándo es desarrollable, simplemente calculamos el **parámetro de distribución**:

$$p(u) = det(\alpha', \mathrm{w}, \mathrm{w}')(u) = det\begin{pmatrix} 2g+2ug'-f' & g^2+2ugg' & 0 \\ u & f(u) & 1 \\ 1 & f'(u) & 0 \end{pmatrix} = g^2+2ugg'-2gf'-2ug'f'+(f')^2,$$

que, agrupando, deja $p(u) = \Big((g(u)-f'(u)\Big)\Big(g(u)-f'(u)+2ug'(u)\Big)$. Por lo tanto, para que p sea cero (que es equivalente a decir que S sea desarrollable), uno de los dos factores ha de ser cero, lo que responde directamente los dos apartados del ejercicio:

$$f'(u) = g(u) \ \Rightarrow f(u) = \int g(u)\ du, \quad \text{ó} \quad f'(u) = g(u)+2ug'(u) \Rightarrow f(u) \overset{partes}{=} 2ug(u) - \int g(u)\ du$$

S.20. Considera la superficie $S = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 3x+(y+1)^2-(z-1)^2 = 0\Big\}$

20*a*) Demuestra que es reglada y haya las rectas contenidas en S que pasan por $(0,-1,1)$

20*b*) Prueba que no es desarrollable.

$\boxed{20a}$ Es importante reconocer al paraboloide hiperbólico (la silla de montar) tras la ecuación implícita de S, pues repitiendo la misma idea que usamos con el estándar (cuando una variable es el producto de las otras 2), obtendremos la parametrización en forma reglada. Operamos

$$3x = (z-1)^2-(y+1)^2 = \overbrace{(z+y)}^{u}\overbrace{(z-y-2)}^{v} \Rightarrow \begin{cases} 3x = uv \\ z+y = u \\ z-y-2 = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{uv}{3} \\ y = \frac{u-v-2}{2} \\ z = \frac{u+v+2}{2} \end{cases}$$

y nos queda la parametrización

$$X(u,v) = \left(\frac{uv}{3}, \frac{u-v-2}{2}, \frac{u+v+2}{2}\right) = \overbrace{\left(0, \frac{u-2}{2}, \frac{u+2}{2}\right)}^{\alpha(u)} + v\,\overbrace{\left(\frac{u}{3}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)}^{\mathrm{w}(u)}.$$

El punto dado $(0,-1,1)$ es $X(0,0)$ de modo que, al igual que en el estándar (cuando una variable es el producto de las otras 2, los ejes correspondientes a las otras dos eran las rectas contenidas en él), ahora son las rectas correspondientes a $u=0$ y $v=0$, esto es

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = -y \end{cases} \quad \& \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = y+2 \end{cases}$$

S.21. Considera la superficie $S = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2y - (x-3)(z-1) = 0\Big\}$. Demuestra que es reglada y determina la línea de estricción.

S.22. Sea $S = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 - y^2 - z = 0\Big\}$. Indica si es regular y si es reglada, en cuyo caso, determina una familia de generatrices rectilíneas.

S.23. Sea S la superficie obtenida al girar la curva $\alpha(t) = (0, \cosh(t), t)$ alrededor del eje OZ.

23*a*) Parametriza S y determina I_p e II_p en un punto genérico.

23*b*) Calcula K y H (curvatura de Gauss y media, respectivamente) y clasifica los puntos de S.

$\boxed{23a}$ Al igual que en el ejercicio 2, podemos parametrizar S como

$$X(t,\theta) = (\cos(\theta)\cosh(t), \operatorname{sen}(\theta)\cosh(t), t), \theta \in (0, 2\pi),$$

y comenzar los cálculos:

$$X_t = \Big(\cos(\theta)\operatorname{senh}(t), \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{senh}(t), 1\Big), \quad X_\theta = \Big(-\operatorname{sen}(\theta)\cosh(t), \cos(\theta)\cosh(t), 0\Big).$$

de donde obtenemos rápidamente la matriz de la primera forma fundamental y el normal:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh^2(t) & 0 \\ 0 & \cosh^2(t) \end{pmatrix}, \qquad y \;\; N(t,\theta) = \frac{\Big(-\cos(\theta), -\operatorname{sen}(\theta), \operatorname{senh}(\theta)\Big)}{\cosh(t)}.$$

Para la segunda forma, calculamos las segundas derivadas

$$X_{tt} = \cosh(t)\Big(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), 0\Big), \quad X_{\theta\theta} = -\cosh(t)\Big(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), 0\Big), \quad X_{t\theta} = \operatorname{senh}(t)\Big(-\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta), 0\Big),$$

de donde

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \;\; y \;\; \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{\cosh^2(t)} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{23b}$ A partir de lo calculado, todo es rápido (ya que todas las matrices son diagonales): las curvaturas principales son $k_1 = -k_2 = \frac{1}{\cosh^2(t)}$, con lo que

$$K = k_1 k_2 = \frac{-1}{\cosh^4(t)} \quad y \quad H = 0,$$

por lo que todos los puntos de S resultan hiperbólicos.

S.24. Se considera la superficie $S = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x - z(y-1) = 0\Big\}$.

24*a*) ¿Es reglada? En caso afirmativo, calcula una familia de generatrices rectilíneas.

24*b*) Halla las direcciones y curvaturas principales en el punto $(0,1,0)$ y clasifícalo.

$\boxed{24a}$ Al igual que en el ejercicio 20, viene bien reconocer a S como un paraboloide hiperbólico, para saber que es reglado y encontrar una parametrización reglada

$$\left.\begin{array}{l} y - 1 = u \\ z/4 = v \\ x = (y-1)z/4 \end{array}\right\} \Rightarrow X(u,v) = (uv, u+1, 4v) = \overbrace{(0, u+1, 0)}^{\alpha(u)} + v\,\overbrace{(u, 0, 4)}^{\mathrm{w}(u)}.$$

La familia de generatrices, al igual que en los ejercicios 14 y 15 se calculan eliminando el parámetro v (aunque en el caso del paraboloide hiperbólico, que es doblemente reglado, también se puede eliminar u)

$$generatrices = \left\{x = \frac{u}{4}z,\ y = u+1, : u \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x = v(y-1),\ z = 4v : v \in \mathbb{R}\right\}.$$

$\boxed{24b}$ Primero calculamos las coordenadas del punto: $(0,1,0) = X(0,0)$, ya que en ellas hemos de trabajar, y ahora calculamos:

$$X_u = (v,1,0),\ y\ X_v = (u,0,4)\ \Rightarrow X_u(0,0) = (0,1,0)\ y\ X_v(0,0) = (0,0,4)$$

de donde obtenemos fácilmente la primera forma fundamental y el normal en el punto $(0,1,0)$:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad y \ \ N(0,0) = (1,0,0).$$

Para la segunda forma, calculamos las segundas derivadas (aunque ya sabemos que $g = 0$ por teoría), que, en este caso, valen igual en todos los puntos:

$$X_{uu} = (0,0,0), \quad X_{vv} = (0,0,0), \quad X_{uv} = (1,0,0)$$

de donde

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y \quad \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} := A.$$

En este caso, vamos a calcular con todas los detalles los valores propios (curvaturas principales) y los vectores propios (direcciones principales) de esta matriz:

Para las **curvaturas principales** hacemos:

$$0 = det(A - kI) = det\begin{pmatrix} -k & 1 \\ 1 & -k \end{pmatrix} = k^2 - 1 = (k-1)(k+1),$$

obteniendo las curvaturas principales: $k_1 = -1$ y $k_2 = 1$. Ahora, para cada una de ellas, calculamos las **direcciones principales** como vectores propios, esto es $v_1 = aX_u + bX_v$ ha de resolver:

$$(A - k_1 I)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \ \Leftrightarrow \ a + b = 0 \ \Leftrightarrow \ v_1 = (1,-1),$$

y, si lo queremos en componentes de $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = aX_u + bX_v = 1(0,1,0) - 1(0,0,4) = (0,1,-4).$$

Para la otra dirección propia $v_2 = aX_u + bX_v$, procedemos igual:

$$(A - k_2 I)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \ \Leftrightarrow \ b - a = 0 \ \Leftrightarrow \ v_2 = (1,1),$$

y, si lo queremos en componentes de $\mathbb{R}^3$:

$$v_2 = aX_u + bX_v = 1(0,1,0) + 1(0,0,4) = (0,1,4).$$

Por último, para clasificarlo (aunque ya sabemos que en un paraboloide hiperbólico todos los puntos son hiperbólicos) simplemente recordamos que $K = k_1 k_2 = -1$ y por lo tanto el punto es hiperbólico.

S.25. Dada la superficie con parametrización $X(u,v) = (v\cos(u), v\,\mathrm{sen}(u), 4u)$, con $v \in \mathbb{R}$, $u \in (0,2\pi)$, se pide

25a) Las curvaturas principales en $(0,1,2\pi)$.

25b) La curvatura normal en el mismo punto en la dirección del vector $(-1,1,4)$.

25c) La curvatura de Gauss y el tipo de punto.

$\boxed{25a}$ Primero calculamos las coordenadas del punto: $(0,1,2\pi) = X(\pi/2,1)$, ya que en ellas hemos de trabajar, y ahora calculamos:

$$X_u = (-v\,\text{sen}(u), v\cos(u), 4),\ \ y\ X_v = (\cos(u), \text{sen}(u), 0)\ \Rightarrow X_u(\pi/2,1) = (-1,0,4)\ y\ X_v(\pi/2,1) = (0,1,0)$$

de donde obtenemos fácilmente la primera forma fundamental y el normal en el punto $(0,1,2\pi)$:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad y\ \ N(\pi/2,1) = \frac{-1}{\sqrt{17}}(4,0,1).$$

Para la segunda forma, calculamos las segundas derivadas:

$$X_{uu}(\pi/2,1) = (0,-1,0), \quad X_{vv}(\pi/2,1) = (0,0,0), \quad X_{uv}(\pi/2,1) = (-1,0,0)$$

de donde

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4/\sqrt{17} \\ 4/\sqrt{17} & 0 \end{pmatrix}, \quad y \quad \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4/\sqrt{17}^3 \\ 4/\sqrt{17} & 0 \end{pmatrix}.$$

Razonando como en el ejercicio 24, obtenemos las curvaturas principales: $k_1 = -4/17$ y $k_2 = 4/17$.

$\boxed{25b}$ Para calcular la curvatura normal en la dirección del vector $(-1,1,4)$, necesitamos **normalizarlo** y calcular sus coordenadas respecto de X_u y X_v, esto es

$$\frac{1}{\sqrt{18}}(-1,1,4) = a(-1,0,4) + b(0,1,0) = (-a,b,4a)\ \Leftrightarrow\ a = \frac{1}{\sqrt{18}}\ y\ b = \frac{1}{\sqrt{18}}.$$

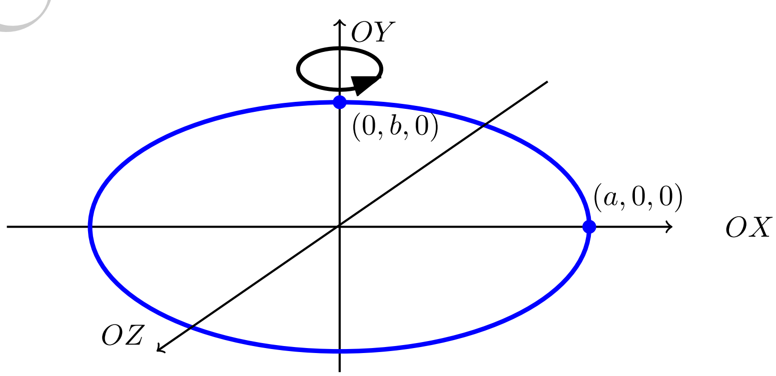
Por lo tanto (T. Meusnier) la curvatura normal es

$$(a,b)\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (\frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}})\begin{pmatrix} 0 & 4/\sqrt{17} \\ 4/\sqrt{17} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} = \frac{8}{\sqrt{17}\sqrt{18}}$$

$\boxed{25c}$ Por último la curvatura de Gauss es $K = k_1 k_2 = -\frac{16}{17^2}$ y por lo tanto el punto es hiperbólico.

S.26. Se considera la elipse $\left\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$, con $b < a$. Halla la ecuación de la superficie S que se obtiene al rotar la elipse en torno a su eje menor, calcula las curvaturas principales en $(0,0,a)$ y clasifica este punto.

$\boxed{26}$ Si entendemos bien el enunciado y lo dibujamos, ya conoceremos la respuesta, ¡el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$! Pero para hacerlo mejor aún (y calcular las curvaturas), vamos a escribirlo todo.



Primero parametrizamos la elipse, mejor dicho, la parte derecha de la elipse, ya que vamos a rotar respecto al eje OY (que corresponde al semieje menor). Podemos hacerlo como un 2D-grafo (despejando, en este caso, $x = a\sqrt{1-(y/b)^2}$) o usando senos y cosenos... aquí usaremos lo segundo (cuidando el intervalo de definición)

$$\alpha(t) = (a\cos(t), b\,\mathrm{sen}(t), 0), \qquad t \in (-\pi, \pi).$$

A continuación, la superficie rotada se parametriza como (la y no cambia y rotamos en el plano $0XZ$ tomando la x como radio):

$$X(t,\theta) = (a\cos(\theta)\cos(t), b\,\mathrm{sen}(t), a\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(t)), \quad t \in (-\pi,\pi), \quad \theta \in (0, 2\pi).$$

Para obtener su ecuación implícita, recurrimos una vez más a las fórmulas fundamentales:

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos(\theta)\cos(t) \\ y = b\,\mathrm{sen}(t) \\ z = a\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (x/a)^2 = \cos^2(\theta)\cos^2(t) \\ (z/a)^2 = \mathrm{sen}^2(\theta)\cos^2(t) \\ (y/b)^2 = \mathrm{sen}^2(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (\frac{x}{a})^2 + (\frac{z}{a})^2 = \cos^2(t) \\ (y/b)^2 = \mathrm{sen}^2(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$$

Para las curvaturas en $(0,0,a) = X(0,\pi/2)$, indicamos los cálculos:

$$X_t\Big(0,\frac{\pi}{2}\Big) = (0,b,0), \qquad X_\theta\Big(0,\frac{\pi}{2}\Big) = (-a,0,0), \qquad N\Big(0,\frac{\pi}{2}\Big) = (0,0,1), \qquad \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

y, también el el punto $(0,0,a) = X(0,\pi/2)$,

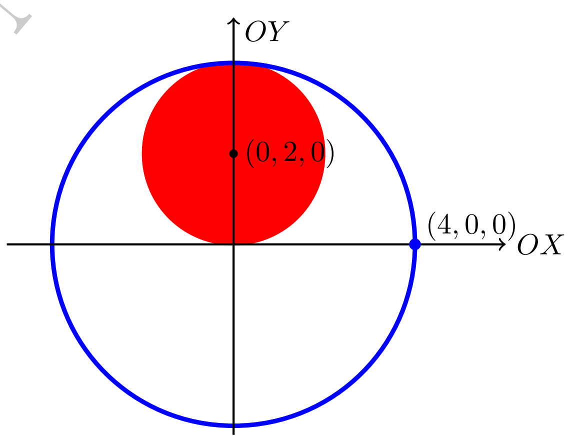
$$X_{tt} = (0,0,-a), \quad X_{t\theta} = (0,0,0), \quad X_{\theta\theta} = (0,0,-a), \quad \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ab^2 & 0 \\ 0 & -a^3 \end{pmatrix}, \qquad k_1 = -ab^2 \;\; y \;\; k_2 = -a^3,$$

y el punto resulta (obviamente) elíptico.

S.27. Calcula el área de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 16$ con $z \geq 0$ y que queda dentro del cilindro $x^2+(y-2)^2 = 4$, es decir, $x^2+(y-2)^2 \leq 4$

$\boxed{27}$ (Solución parcial) Dibujamos, para una mayor intuición, la intersección con el plano $z = 0$ de la esfera (en azul) y el disco interior al cilindro (en rojo). La sección pedida sería el trozo superior de esfera que queda por encima del disco rojo: El área pedida será pues Área $= \int_{\text{Disco}} \sqrt{EG-F^2}\, d(x,y)$, por lo que sólo falta



parametrizar (eligiendo bien la parametrización para que la integral sea calculable).
Valor= 18.2655

S.28. Calcula la primera forma fundamental de:

28*a*) El cilindro parabólico $y^2 - 4x = 0$.

28*b*) La esfera del ejercicio 2.

S.29. Calcula la curvatura de Gauss en un punto genérico del toroide cuya parametrización es:

$$X(u,v) = \Big((R - r\cos(u))\cos(v), (R - r\cos(u))\operatorname{sen}(v), r\operatorname{sen}(u)\Big), \qquad u, v \in (0, 2\pi), \quad 0 < r < R.$$

S.30. Dada la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ xyz = 1\}$, determina, si los tiene, sus puntos umbilicales.

S.31. Halla las líneas asintóticas de la superficie de ecuación $z = y^2/x^2$ en el punto $(1,1,1)$

.

S.32. Dada $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z^2 = x + 4y^2\}$:

32*a*) ¿es reglada? En caso afirmativo, determina todas las generatrices rectilíneas.

32*b*) Halla la curvatura media y la total (de Gauss) en el orígen y clasifícalo.

$\boxed{32a}$ Al igual que en el ejercicio 20 (y otros), viene bien reconocer a S como un paraboloide hiperbólico a partir de su ecuación implícita, para saber que es reglado y encontrar una parametrización reglada. Operamos

$$x = z^2 - 4y^2 = \overbrace{(z+2y)}^{u}\overbrace{(z-2y)}^{v} \Rightarrow \begin{cases} x = uv \\ z + 2y = u \\ z - 2y = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = uv \\ y = \frac{u-v}{4} \\ z = \frac{u+v}{2} \end{cases}$$

y nos queda la parametrización que podemos "ver" de dos formas:

$$X(u,v) = \left(uv, \frac{u-v}{4}, \frac{u+v}{2}\right) = \overbrace{\left(0, \frac{u}{4}, \frac{u}{2}\right)}^{\alpha_1(u)} + v\overbrace{\left(u, \frac{-1}{4}, \frac{1}{2}\right)}^{\mathrm{w}_1(u)} \overset{\text{ó}}{=} \overbrace{\left(0, \frac{-v}{4}, \frac{v}{2}\right)}^{\alpha_2(v)} + u\overbrace{\left(v, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)}^{\mathrm{w}_2(v)}.$$

Las familias de generatrices, de nuevo, se calculan eliminando el parámetro v (ó u)

$$generatrices = \Big\{x = (z-2y)u, \ \ y = (u-z)/2 : u \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\{x = (z+2y)v, \ \ y = (z-v)/6 : v \in \mathbb{R}\Big\}.$$

$\boxed{32b}$ Las coordenadas del origen son: $(0,0,0) = X(0,0)$, con lo que seguimos calculando:

$$X_u = (v, 1/4, 1/2), \ y \ X_v = (u, -1/4, 1/2) \ \Rightarrow X_u(0,0) = (0, 1/4, 1/2) \ y \ X_v(0,0) = (0, -1/4, 1/2)$$

de donde obtenemos fácilmente la primera forma fundamental y el normal en el punto $(0,0,0)$:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad y \ \ N(0,0) = (1,0,0).$$

Para la segunda forma, calculamos:

$$X_{uu} = (0,0,0) = X_{vv}, \quad X_{uv} = (1,0,0), \quad \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y, por último

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} := A.$$

En este caso, como no necesitamos las curvaturas principales, optamos por usar la traza y el determinante para calcular K y H.

$$K = det(A) = 9 - 25 = -16, \qquad H = \frac{1}{2} traza(A) = (-3-3)/2 = -3;$$

con lo que concluimos que el orígen es hiperbólico.

S.33. Dada la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x^2 + 3y^2 - z^2 = 1\}$:

33a) ¿Es regular? ¿es reglada?

33b) Calcula el plano tangente en el punto $P = (1, 0, 1)$

33c) Halla la curvatura normal an P según la dirección del vector $v = (1, 0, 2)$.

S.34. Dada la curva $\alpha(t) = (t + 1, 0, 5t^2)$, con $t \in \mathbb{R}$,

34a) Parametriza la superficie S obtenida al girar la curva sobre el eje OZ

34b) Calcula las curvaturas principales en el punto $P = (0, 1, 0)$

34c) Calcula las curvatura y la torsión del paralelo[a] correspondiente a $z = 5$.

[a] Paralelo: por analogía con los terrestres, son cada una de las curvas circulares que se obtienen al girar un punto de la curva α.

$\boxed{34a}$ La parametrización usual es (circunferencias en el plano OXY de radio $(x + 1)$ y altura $5t^2$):

$$X(t, \theta) = ((t + 1)\cos(\theta), (t + 1)\,\text{sen}(\theta), 5t^2), \ t \in \mathbb{R}, \ \theta \in (0, 2\pi).$$

$\boxed{34b}$ Hacemos los cálculos en el punto $0, 1, 0 = X(0, \pi/2)$.

$$X_t = (\cos(\theta), \text{sen}(\theta), 10t), \ X_\theta = (-(t+1)\,\text{sen}(\theta), (t+1)\cos(\theta), 0) \Rightarrow X_t(0, \pi/2) = (0, 1, 0), \ X_\theta(0, \pi/2) = (-1, 0, 0).$$

Por lo tanto, la matriz de la primera forma y el normal son, respectivamente:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad y \ \ N(0, \pi/2) = \frac{X_t \times X_\theta}{|X_t \times X_\theta|} = (0, 0, 1).$$

Nótese que, como las dos primeras componentes de N son 0, los cálculos de e, f y g son más simples, pues sólo necesitamos las últimas componentes de X_{tt}, $X_{\theta\theta}$ y $X_{t\theta}$. Obtendremos

$$X_{tt} = (0, 0, 10), \quad X_{\theta\theta} = -((t + 1)\cos(\theta), (t + 1)\,\text{sen}(\theta), 0), \quad X_{t\theta} = (-\,\text{sen}(\theta), \cos(\theta), 0),$$

de donde $e = N \cdot X_{tt} = 10$ y $f = g = 0$, lo que nos permite fácilmente (puesto que ambas matrices **son diagonales**) obtener la matriz y las curvaturas principales sin apenas hacer operaciones:

$$matriz = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

siendo $k_1 = 10$ y $k_2 = 0$ las curvaturas principales.

$\boxed{34c}$ El paralelo pedido (para que $z = 5$ el parámetro t vale 1) es la circunferencia

$$\beta(\theta) = X(1, \theta) = (2\cos(\theta), 2\,\text{sen}(\theta), 5)$$

S.35. Dada la superficie de parametrización:

$$X(u,v) = (3u^2v - 2u^3 - 3u^2, 1 + 4uv - 4u - 2u^2, v + 1),\ \ u, v \in \mathbb{R}.$$

35*a*) Clasifícala (¿es reglada? ¿desarrollable?)

35*b*) Determina la arista de retroceso o la línea de estricción, si procede.

35*c*) En el punto $P = (-8, -11, 0)$, calcula las curvaturas y direcciones principales, y la curvatura normal en la dirección del vector $\mathrm{w} = (-3, 0, 1)$

$\boxed{35a}$ Reescribimos X para ver que es sí es reglada:

$$X(u,v) = (3u^2v - 2u^3 - 3u^2, 1 + 4uv - 4u - 2u^2, v + 1) = \overbrace{(-2u^3 - 3u^2, 1 - 4u - 2u^2, 1)}^{\alpha(u)} + v\, \overbrace{(3u^2, 4u, 1)}^{\mathrm{w}(u)}.$$

Para ver cuándo es desarrollable, calculamos el **parámetro de distribución**:

$$p(u) = det(\alpha', \mathrm{w}, \mathrm{w}')(u) = det \begin{pmatrix} -6u^2 - 6u & -4 - 4u & 0 \\ 3u^2 & 4u & 1 \\ 6u & 4 & 0 \end{pmatrix} = -4(-6u^2 - 6u) + 6u(-4 - 4u) = 0,$$

por lo que es desarrollable. Vamos a aprovechar este ejercicio para comprobar que la curva de puntos críticos (calculados directamente) coinciden con la arista de retroceso de esta superficie tangente (no es ni un cono ni un cilindro). Calculamos la arista con la fórmula:

$$\begin{aligned} \beta(u) &= \alpha - \frac{\alpha' \cdot \mathrm{w}'}{\mathrm{w}' \cdot \mathrm{w}'}\mathrm{w} = \alpha(u) - \frac{(-6u^2 - 6u, -4 - 4u, 0) \cdot (6u, 4, 0)}{(6u, 4, 0) \cdot (6u, 4, 0)}(6u, 4, 0) \\ &= \alpha(u) - \frac{-16 - 16u - 36u^2 - 36u^3}{16 + 36u^2}(6u, 4, 0) = \alpha(u) + (1 + u)(6u, 4, 0) = (u^3, 2u^2 + 1, u + 2). \end{aligned}$$

Por otro lado, calculamos los puntos críticos

$$X_u = (6uv - 6u - 6u^2, 4v - 4 - 4u, 0),\ X_v = (3u^2, 4u, 1) \Rightarrow X_u \times X_v = \Big(4(v - u - 1), 6u(1 + u - v), 12u^2(v - u - 1)\Big),$$

de donde se ve que $X_u \times X_v$ se anula cuando $v = u + 1$. Así que si evaluamos X a lo largo de estos valores, obtenemos la curva de puntos críticos

$$\beta(u) = X(u, u + 1) = \alpha(u) + (u + 1)\mathrm{w}(u) = (u^3, 2u^2 + 1, u + 2),$$

que coincide con la arista de retroceso.

S.36. Dada la superficie de parametrización:

$$X(u,v) = ((1 + v)\cos(u), (1 + v)\,\mathrm{sen}(u), 5v^2).$$

36*a*) Clasifica el punto $P = (0, 1, 0)$.

36*b*) Halla la curvatura normal en la dirección del vector $\mathrm{w} = (-2, -1, 0)$ en el punto P.

S.37. Parametriza y da la ecuación implícita de la superficie resultante de:

$$\text{trasladar la curva } \ \alpha : \begin{cases} y = 0 \\ 2z = x^2 \end{cases} \ \text{ a lo largo de la curva } \ \beta : \begin{cases} x = 0 \\ 3z = -y^2 \end{cases}$$

y calcula I_p, II_p y K en el punto $Q = (2, 0, 2)$.

$\boxed{37}$ Como se trata de una superficie de traslación, buscamos un punto de corte, en este caso es casi obvio que este ha de ser el $P_0 = (0,0,0)$. Parametrizamos ambas curvas y la superficie:

$$\alpha(t) = (t, 0, \frac{t^2}{2}), \qquad \beta(t) = (0, t, \frac{-t^2}{3}), \quad \Rightarrow X(u,v) = \alpha(u) + \beta(v) - P_0 = \Big(u, v, \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{3}\Big).$$

El punto descrito tiene por coordenadas: $P = (2,0,2) = X(2,0)$, por lo que hacemos los cálculos en este punto:

$$X_u = (1,0,1), \ y \ X_v = (0,1,-2v/3) \ \Rightarrow X_u(2,0) = (1,0,2) \ y \ X_v(2,0) = (0,1,0),$$

de donde obtenemos fácilmente la primera forma fundamental y el normal en el punto P:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad y \ \ N(0,0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,0,1).$$

Para la segunda forma, calculamos:

$$X_{uu} = (0,0,1) = X_{vv}, \quad X_{vv} = (0,0,-2/3), \quad \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$$

y, en este caso, vamos a calcular K desde la fórmula:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-2/(3\sqrt{5}^2)}{5} = \frac{-2}{75}$$

S.38. Se considera la superficie de ecuación implícita: $z = \dfrac{4xy}{x^2+y^2}$, para x e y no simultáneamente cero.

38*a*) Parametrízala y clasifícala.

38*b*) Determina la arista de retroceso o la línea de estricción, si procede.

38*c*) Halla su plano tangente en el punto $P = (1,1,2)$

S.39. De una superficie S cono cemos sus formas fundamentales en un punto genérico $P = X(u,v)$:

$$I_P(a,b) = v^2 \tan^2(u) a^2 + v^2 b^2, \qquad \& \qquad II_P(a,b) = \frac{\cos^2(u)}{v^2} a^2 - \operatorname{sen}^2(u) b^2.$$

Se pide.

39*a*) Las curvaturas principales, la curvatura de Gauss y la curvatura media en un punto genérico.

39*b*) Las líneas asintóticas.

39*c*) Clasifica el punto $P = X(\pi/4, 1)$.

$\boxed{39a}$ Lo primero que hemos de hacer es extraer la información escondida tras las fórmulas, a saber:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^2\tan^2(u) & 0 \\ 0 & v^2 \end{pmatrix}, \qquad y \qquad \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos^2(u)}{v^2} & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen}^2(u) \end{pmatrix}$$

y, a partir de aquí, operar como sabemos.

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos^4(u)}{v^4\operatorname{sen}^2(u)} & 0 \\ 0 & \frac{-\operatorname{sen}^2(u)}{v^2} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$k_1 = \frac{\cos^4(u)}{v^4 \operatorname{sen}^2(u)}, \quad k_2 = \frac{-\operatorname{sen}^2(u)}{v^2}, \quad K = \frac{-\cos^4(u)}{v^6}, \ H = \frac{k_1+k_2}{2} = \frac{\cos^4(u) - v^2 \operatorname{sen}^4(u)}{2v^4 \operatorname{sen}^2(u)}$$

$\boxed{39b}$ Igualando II_P a cero, obtenemos:

$$0 = \frac{\cos^2(u)}{v^2} a^2 - \operatorname{sen}^2(u) b^2 = \left(\frac{\cos(u)}{v} a - \operatorname{sen}(u) b\right)\left(\frac{\cos(u)}{v} a + \operatorname{sen}(u) b\right) \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \pm v \tan(u)$$

$\boxed{39c}$ En este caso, como tenemos K en todo punto, simplemente sustituimos:

$$K(\pi/4, 1) = \frac{-\cos^4(\pi/4)}{1^6} = \frac{-1}{4},$$

por lo que es hiperbólico.

S.40. Dada la curva $\alpha(u) = (0, u, \operatorname{sen}(u))$, $u \in (0, \pi)$:

40a) Halla su triedro de Frenet en un punto cualquiera.

40b) Considera la superficie tubular[a] y expresa $\{X_u, X_v\}$ en función del triedro de Frenet.

40c) Calcula I_p a partir del apartado 40b anterior.

[a] Ver ejercicio 8.