Universidad de Granada
Dept. Matemática Aplicada

Ejercicios
(Actualizado 2 de noviembre de 2017)

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS II
GRADO INGENIERÍA CIVIL

EJERCICIOS DE CURVAS

C.1. Justifica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1.a) En cada punto de una curva α parametrizada por el arco se cumple: $B'' = k\tau\, T - \tau^2 B$.

1.b) En cada punto de una curva α parametrizada por el arco se cumple: $\langle T'', T\rangle - \langle N'', N\rangle = \tau^2$.

1.c) La evoluta de la curva plana $\alpha(t) = (2t, 2t^2, 1)$ para $t > 0$ es $e(t) = (-8t^3, 1 + 6t^2, 1)$.

1.d) Dada una curva $\alpha(t)$ regular cualquiera, la longitud del arco de curva sobre cualquier intervalo de la forma $[0, L]$ será siempre mayor o igual a L, dándose la igualdad solo en el caso en que esté parametrizada por el arco.

$\boxed{1a}$ Usamos las fórmulas de Frenet para calcular B'':

$$B' = -\tau N \;\Rightarrow\; B'' = -\tau' N - \tau N' = -\tau' N - \tau(-kT + \tau B) = -\tau' N + k\tau\, T - \tau^2 B,$$

por lo que $1a$ es falsa, ya que solo se cumple cuando $\tau' = 0$, es decir, para curvas con torsión constante.

$\boxed{1b}$ Igual que en anterior, usamos las fórmulas de Frenet para calcular T'' y N'':

$$\begin{aligned} T' &= kN && \Rightarrow\; T'' = k'N + kN' = k'N + k(-kT + \tau B) = k'N - k^2 T + k\tau B,\\ N' &= -kT + \tau B && \Rightarrow\; N'' = -k'T - kT' + \tau' B + \tau B' = -k'T - k^2 N + \tau' B - \tau^2 N, \end{aligned}$$

de donde, haciendo los productos escalares indicados, obtenemos

$$\begin{aligned} \langle T'', T\rangle &= k' \overbrace{\langle N, T\rangle}^{=0} - k^2 \overbrace{\langle T, T\rangle}^{=1} + k\tau \overbrace{\langle B, T\rangle}^{=0} = -k^2,\\ \langle N'', N\rangle &= -k' \overbrace{\langle T, N\rangle}^{=0} - k^2 \overbrace{\langle N, N\rangle}^{=1} + \tau' \overbrace{\langle B, N\rangle}^{=0} - \tau^2 \overbrace{\langle N, N\rangle}^{=1} = -k^2 - \tau^2, \end{aligned}$$

por lo que $1b$ es cierta ya que $\langle T'', T\rangle - \langle N'', N\rangle = -k^2 - (-k^2 - \tau^2) = \tau^2$.

$\boxed{1c}$ Solo hemos de hacer el cálculo de la evoluta y ver si coincide:

$$\alpha'(t) = (2, 4t, 0), \;\Rightarrow\; T(t) = \frac{(1, 2t, 0)}{\sqrt{1 + 4t^2}}, \;\Rightarrow\; N(t) = \frac{(-2t, 1, 0)}{\sqrt{1 + 4t^2}} \;\; y \;\; k(t) = \frac{1}{(\sqrt{1 + 4t^2})^3},$$

y, por último verificamos que, efectivamente, la evoluta de α: $\alpha + N/k$, es la curva $e(t)$ descrita:

$$\alpha + \frac{N}{k} = (2t, 2t^2, 1) + \frac{(\sqrt{1 + 4t^2})^3}{\sqrt{1 + 4t^2}}(-2t, 1, 0) = (2t, 2t^2, 1) + (-2t - 8t^3, 1 + 4t^2, 0) = (-8t^3, 1 + 6t^2, 1).$$

$\boxed{1d}$ Falso. Basta considerar curvas sencillas para verlo, como por ejemplo rectas en el plano: $\alpha(t) = (a\,t, 1)$, con $a > 0$, en el intervalo $[0, L]$ cuya longitud es

$$long = \int_0^L |\alpha'(t)| dt = \int_0^L |(a, 0)|\, dt = \int_0^L \sqrt{a^2 + 0^2}\, dt = a \int_0^L dt = a\, L.$$

Por lo tanto, para $a < 1$, obtenemos longitudes menores que L, lo que contradice el enunciado. Además, es cierto que se da la igualdad cuando está parametrizada por el arco, pero no “solo” en ese caso.

C.2. Determinar una parametrización regular de las curvas:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 4x^2+y^2-8x+4y-4=0\},\\ C_2 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -2x^2+y^2-12x-2y-18=0\},\\ C_3 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y^2-10y+x+5=0\}, \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ Al ser curvas cuadráticas, primero completamos cuadrados en las ecuaciones que definen las curvas:

$$\begin{aligned} 4x^2+y^2-8x+4y-4 = 4(x-1)^2+(y+2)^2-12=0 \quad &\Leftrightarrow\quad \Big(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\Big)^2+\Big(\frac{y+2}{2\sqrt{3}}\Big)^2=1,\\ -2x^2+y^2-12x-2y-18=(-2)(x+3)^2+(y-1)^2-1=0 \quad &\Leftrightarrow\quad (y-1)^2-\Big(\sqrt{2}\,(x+3)\Big)^2=1,\\ x+y^2-10y+5=x+(y-5)^2-20=0 \quad &\Leftrightarrow\quad x=20-(y-5)^2, \end{aligned}$$

por lo que son, respectivamente, una elipse, una hipérbola y una parábola. Usamos las parametrizaciones usuales de ambas cónicas (notemos que en el caso de C_2 hay dos "trozos", de ahí el $\pm$ que aparece).

$$\begin{aligned} C_1=\alpha([0,2\pi]) \;&:\; \alpha(t)=\Big(\sqrt{3}\cos(t)+1, 2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(t)-2\Big)\\ C_2=\alpha_+(\mathbb{R})\cup\alpha_-(\mathbb{R}) \;&:\; \alpha_\pm(t)=\Big(\frac{\mathrm{senh}(t)}{\sqrt{2}}-3, 1\pm\cosh(t)\Big),\\ C_3=\alpha(\mathbb{R}) \;&:\; \alpha(t)=\Big(20-(t-5)^2, t\Big); \end{aligned}$$

C.3. Dado un abierto $U\subseteq\mathbb{R}^2$ y una función regular $f:U\to\mathbb{R}$, consideramos:

$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=0\}.$$

Halla las ecuaciones de la recta tangente y la normal en un punto genérico (x_0,y_0).

$\boxed{3}$ En general, la **ecuación de una recta** que pasa por un punto (a,b) y tiene dirección (v_1,v_2) es

$$v_1(y-b)-v_2(x-a)=0,$$

por lo que, en nuestro caso, como ya tenemos el punto, solo necesitamos sendos vectores tangente y normal (no hace falta que tengan norma 1). Vamos a deducir sus expresiones a partir de f.

En este caso, no tenemos explícitamente una parametrización de una curva α cuya traza sea C, pero podemos trabajar igualmente con ella (no la necesitamos). Tomamos una curva α regular que parametriza C y tomamos t_0 tal que $\alpha(t_0)=(x_0,y_0)$. Como $\alpha(I)=C$, entonces la composición $f(\alpha(t))$ es siempre cero (constante), para todo t. Por lo tanto su derivada es cero; veamos qué se obtiene:

$$f(\alpha(t))=0\;\forall t,\;\Rightarrow\; 0=\frac{d}{dt}(f(\alpha(t)))=\nabla f(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)\forall t,\;\Rightarrow\;\nabla f(x_0,y_0)\cdot\alpha'(t_0),$$

es decir, **el vector gradiente $\nabla f(x_0,y_0)=(f_x,f_y)$ es siempre perpendicular a la curva C en el punto** (x_0,y_0), ya que $\alpha'(t_0)$ es un vector tangente. Por lo tanto:

$$(f_x,f_y)\text{ es perpendicular y }(f_y,-f_x)\text{ es tangente.}$$

Por lo tanto, siguiendo la fórmula de arriba", las rectas son:

$$\begin{aligned} \text{recta normal:}\quad & f_x(x_0,y_0)(y-y_0)-f_y(x_0,y_0)(x-x_0)=0,\\ \text{recta tangente:}\quad & f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)=0. \end{aligned}$$

C.4. Determinar una curva plana cuya ecuación intrínseca es $k(s) = \frac{1}{\sqrt{2as}}$ donde $a > 0$ y $s \geq 0$. Repite el ejercicio para $k(s) = \frac{1}{as+b}$ con $a, b > 0$.

$\boxed{4}$ Se trata de "construir hacia atrás"; normalmente partimos de $\alpha(s)$ y calculamos $k(s) = |\alpha''(s)|$, y ahora se trata de invertir el proceso. Veámoslo paso a paso:

Buscamos una curva $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ parametrizada por el arco, es decir $|\alpha'(s)| = 1$. Por lo tanto, el vector $\alpha'(t)$ está siempre en la circunferencia de radio 1 y habrá algún ángulo $\theta(t)$ tal que

$$\alpha'(s) = (x'(s), y'(s)) = (\cos(\theta(s), \operatorname{sen}(\theta(s))), \text{ para cada } s,$$

y, por lo tanto: $\alpha''(s) = \theta'(s)\Big(- \operatorname{sen}(\theta(s)), \cos(\theta(s)\Big)$. Como la curvatura es $k(s) = |\alpha''(s)|$, obtenemos:

$$k(s) = |\alpha''(s)| = \sqrt{\theta'(s)^2 \operatorname{sen}^2(s) + \theta'(s)^2 \cos^2(s)} = \sqrt{\theta'(s)^2} = |\theta'(s)|,$$

de donde, tomando θ positivo, deducimos que $\theta(s)$ ha de ser una primitiva de $k(s)$, esto es, $\theta(s) = \int k(s)ds$ y

$$\alpha(s) = \Big(\int \cos(\theta(s))ds, \int \operatorname{sen}(\theta(s))ds \Big), \text{ para cada } s.$$

Ahora en el primer ejemplo, $k(s) = \frac{1}{\sqrt{2as}}$, tenemos $\theta(s) = \int \frac{1}{\sqrt{2as}} ds = \frac{\sqrt{2s}}{\sqrt{a}}$ e, integrando por partes,

$$\alpha(s) = \Big(a \cos\Big(\frac{\sqrt{2s}}{\sqrt{a}}\Big) + \sqrt{2as} \operatorname{sen}\Big(\frac{\sqrt{2s}}{\sqrt{a}}\Big), a \operatorname{sen}\Big(\frac{\sqrt{2s}}{\sqrt{a}}\Big) - \sqrt{2as} \cos\Big(\frac{\sqrt{2s}}{\sqrt{a}}\Big) \Big).$$

mientras que en el segundo, $k(s) = \frac{1}{as+b}$, resulta $\theta(s) = \int \frac{1}{as+b} ds = \frac{\ln(as+b)}{a}$ y

$$\alpha(s) = \frac{as+b}{1+a^2} \Big(a \cos\Big(\frac{\ln(as+b)}{a}\Big) + \operatorname{sen}\Big(\frac{\ln(as+b)}{a}\Big), a \operatorname{sen}\Big(\frac{\ln(as+b)}{a}\Big) - \cos\Big(\frac{\ln(as+b)}{a}\Big) \Big).$$

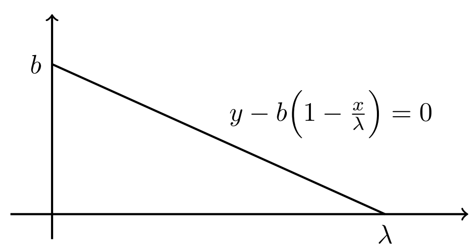
C.5. Considera la familia de rectas planas tales que la suma de las distancias de sus puntos de corte con la parte positiva de los ejes al origen es siempre 1.

5.a) Verifica que cada una de estas rectas cumple: $y - (1-\lambda)\big(1 - \frac{x}{\lambda}\big) = K$, para cada $\lambda \in (0, 1)$. (Has de determinar el valor de $K \in \mathbb{R}$).

5.b) Calcula la envolvente de dicha familia.

5.c) Calcula centro y radio de la circunferencia osculatriz a dicha envolvente en el punto $P = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

$\boxed{5a}$ Si elegimos como parámetro $\lambda \in (0, 1)$ el punto de corte de cada recta con el eje OX, y llamamos b al punto de corte con el eje OY (ver dibujo), entonces cada recta es de la forma $y = b - \frac{b}{\lambda}x$.



Dado que suma de las distancias entre el $(0, 0)$ y los puntos de corte con los ejes: $(\lambda, 0)$ y $(0, b)$, es siempre 1, esto permite despejar b en función de λ

$$\lambda + b = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 1 - \lambda$$

Por lo tanto, la ecuación implícita del haz de rectas es

$$0 = F(x, y, \lambda) = y - (1-\lambda)\Big(1 - \frac{x}{\lambda}\Big),$$

y queda resuelto el apartado $5a$ con $K = 0$.

$\boxed{5b}$ Para responder, planteamos las ecuaciones de la envolvente:

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 1 - \frac{x}{\lambda^2} = 0, \qquad y \qquad F(x, y, \lambda) = 0,$$

de donde obtenemos la envolvente (en este caso no hay puntos singulares ya que $\frac{\partial F}{\partial y} = 1$):

$$x = x(\lambda) = \lambda^2, \quad y = y(\lambda) = (1-\lambda)^2, \quad \lambda \in [0, 1].$$

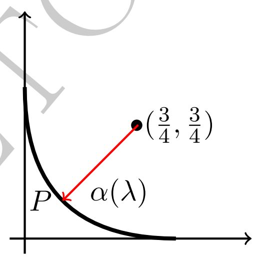
$\boxed{5c}$ Es fácil ver que el punto $P = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ de la envolvente se obtiene para $\lambda_0 = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, lo que nos piden es obtener la circunferencia osculatriz a la curva obtenida:

$$\alpha(\lambda) = \Big(\lambda^2, (1-\lambda)^2\Big), \text{ en el punto } P = \alpha(\lambda_0).$$

Para ello, necesitamos el normal $N(\lambda_0)$ y el radio de curvatura $R(\lambda_0)$. Pasamos a hacer los cálculos:

$$\begin{aligned}
\alpha'(\lambda) = \Big(2\lambda, 2(\lambda-1)\Big) \quad &\Rightarrow \quad T(\lambda) = \tfrac{\alpha'(\lambda)}{|\alpha'(\lambda)|} = \tfrac{(\lambda, \lambda-1)}{\sqrt{2\lambda^2-2\lambda+1}} \quad \text{y} \quad T'(\lambda) = \tfrac{(1-\lambda, \lambda)}{(2\lambda^2-2\lambda+1)^{3/2}}\ , \\
&\Rightarrow \qquad \alpha'(\lambda_0) = (1, -1) \quad \text{y} \quad T'(\lambda_0) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}), \\
&\Rightarrow \quad N(\lambda_0) = \tfrac{T'(\lambda)}{|T'(\lambda)|} = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) \quad \text{y} \quad k(\lambda_0) = \tfrac{|T'(\lambda_0)|}{|\alpha'(\lambda_0)|} = \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la circunferencia osculatriz tiene radio $R_0 = \frac{1}{k(\lambda_0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y centro $= P + R_0\, N(\lambda_0) = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$.



C.6. Considera la familia de rectas planas cuyos puntos de corte con la parte positiva de los ejes están siempre a distancia 1.

$6a$) Calcula la envolvente de dicha familia.

$6b$) Determina la circunferencia osculatriz a dicha envolvente en el punto $P = (\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$

$\boxed{6a}$ Si elegimos como parámetro $\lambda \in [0, 1]$ el punto de corte de cada recta con el eje OX, y llamamos b al punto de corte con el eje OY (ver dibujo del ejercicio 5), entonces cada recta es de la forma $y = b - \frac{b}{\lambda}x$.

Dado que la distancia entre los puntos de corte $(\lambda, 0)$ y $(0, b)$ es constantemente 1, esto permite despejar b en función de λ

$$\lambda^2 + b^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{1-\lambda^2}$$

Por lo tanto, la ecuación implícita del haz de rectas es

$$0 = F(x, y, \lambda) = y - \Big(1 - \frac{x}{\lambda}\Big)\sqrt{1-\lambda^2}.$$

Planteamos las ecuaciones de la envolvente:

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = \frac{\lambda^3 - x}{\lambda^2\sqrt{1-\lambda^2}} = 0, \qquad y \qquad F(x,y,\lambda) = 0,$$

de donde obtenemos la envolvente (en este caso no hay puntos singulares ya que $\frac{\partial F}{\partial y} = 1$):

$$x = x(\lambda) = \lambda^3, \quad y = y(\lambda) = (1-\lambda^2)^{3/2}, \quad \lambda \in [0,1].$$

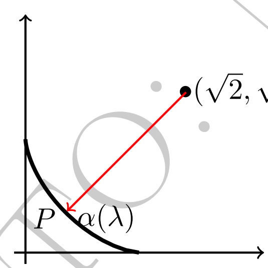
$\boxed{6b}$ Es fácil ver que el punto $P = (\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ de la envolvente se obtiene para $\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Por lo tanto, lo que nos piden es obtener la circunferencia osculatriz a la curva obtenida:

$$\alpha(\lambda) = \Big(\lambda^3, (1-\lambda^2)^{3/2}\Big), \text{ en el punto } P = \alpha(\lambda_0).$$

Para ello, necesitamos el normal $N(\lambda_0)$ y el radio de curvatura $R(\lambda_0)$. Pasamos a hacer los cálculos:

$$\begin{aligned} \alpha'(\lambda) = \Big(3\lambda^2, -3\lambda\sqrt{1-\lambda^2}\Big) \quad &\Rightarrow \quad T(\lambda) = \tfrac{\alpha'(\lambda)}{|\alpha'(\lambda)|} = (\lambda, -\sqrt{1-\lambda^2}) \quad \text{y} \quad T'(\lambda) = (1, \lambda/\sqrt{1-\lambda^2}), \\ &\Rightarrow \qquad \alpha'(\lambda_0) = (\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}) \quad \text{y} \quad T'(\lambda_0) = (1,1), \\ &\Rightarrow \qquad N(\lambda_0) = \tfrac{T'(\lambda)}{|T'(\lambda)|} = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) \quad \text{y} \quad k(\lambda_0) = \tfrac{|T'(\lambda_0)|}{|\alpha'(\lambda_0)|} = \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto la circunferencia osculatriz tiene radio $R_0 = \frac{1}{k(\lambda_0)} = \frac{3}{2}$ y centro $= P + R_0\, N(\lambda_0) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$.



> C.7. La siguiente parametrización corresponde a una curva plana llamada[a] *tractriz*.
>
> $$x(t) = t - a\,\tanh(t/a), \qquad y(t) = a\,\mathrm{sech}(t/a), \qquad \text{donde } a > 0,\ y\ t \in \mathbb{R}.$$
>
> 7*a*) Calcula la recta tangente en un punto genérico P de la *tractriz*.
>
> 7*b*) Siendo Q el punto de corte de la recta tangente en P con el eje de abscisas, demuestra que la longitud del segmento que une P y Q es constante e igual a a.
>
> [a] Véase https://es.wikipedia.org/wiki/Tractriz.

$\boxed{7a}$ Calculamos sus derivadas en el punto genérico $P = (x(t), y(t)) := \alpha(t)$[1]:

$$\alpha'(t) \quad = \quad \Big(1 - \mathrm{sech}^2(t/a),\ -\mathrm{senh}(t/a)/\cosh^2(t/a)\Big),$$

La recta tangente que pasa por P, es (ver ejercicio 3)

$$(1-\mathrm{sech}^2(t/a))\Big[y - a\,\mathrm{sech}(t/a)\Big] + \mathrm{senh}(t/a)/\cosh^2(t/a)\Big[x - (t - a\,\tanh(t/a))\Big] = 0.$$

[1] Para todo este ejercicio es útil recordar que: $1 = \cosh^2(b) - \mathrm{senh}^2(b)$.

$\boxed{7b}$ Para calcular Q, hacemos $y = 0$ y despejamos la x. A pesar de lo "aparatoso" de esta expresión, todo cancela y queda $x = t$, es decir, $Q = (t, 0)$. Así, la distancia entre P y Q es (la hacemos al cuadrado para evitar la raíz), y vemos que sale a^2, como queríamos probar.

$$|Q - P|^2 = (t - t + a\,\tanh(t/a))^2 + a^2\,\mathrm{sech}(t/a) = a^2\,\frac{\mathrm{senh}^2(t/a) + 1}{\cosh^2(t/a)} = a^2.$$

C.8. Hayar la evoluta plana de la curva

$$\alpha(t) = (3\cos(t) + \cos(3t), 3\,\mathrm{sen}(t) - \mathrm{sen}(3t)), \qquad t \in [0, \pi/2].$$

$\boxed{8}$ Para simplificar desde el principio simplificamos usando igualdades trigonométricas, claves para este ejercicio:

$$\begin{aligned}
\cos(3t) &= \cos(2t + t) = \cos(2t)\cos(t) - \mathrm{sen}(2t)\,\mathrm{sen}(t) = (\cos^2(t) - \mathrm{sen}^2(t))\cos(t) - (2\cos(t)\,\mathrm{sen}(t))\,\mathrm{sen}(t)\\
&= \cos^3(t) - 3\cos(t)\,\mathrm{sen}^2(t) = \cos^3(t) - 3\cos(t)(1 - \cos^2(t)) = 4\cos^3(t) - 3\cos(t).\\
\mathrm{sen}(3t) &= \mathrm{sen}(2t + t) = \mathrm{sen}(2t)\cos(t) + \cos(2t)\,\mathrm{sen}(t) = (2\cos(t)\,\mathrm{sen}(t))\cos(t) + (\cos^2(t) - \mathrm{sen}^2(t))\,\mathrm{sen}(t)\\
&= 3\,\mathrm{sen}(t)\cos^2(t) - \mathrm{sen}^3(t) = 3\,\mathrm{sen}(t)(1 - \mathrm{sen}^2(t)) - \mathrm{sen}^3(t) = 3\,\mathrm{sen}(t) - 4\,\mathrm{sen}^3(t).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, α puede ser reescrita como $\alpha(t) = (4\cos^3(t), 4\,\mathrm{sen}^3(t))$. Hacemos los cálculos necesarios para la evoluta (todos los senos y cosenos involucrados son positivos, ya que estamos en $[0, \pi/2]$; este hecho se ha usado en algunas de las simplificaciones):

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) = 12(-\cos^2(t)\,\mathrm{sen}(t), \mathrm{sen}^2(t)\cos(t)) \quad &\Rightarrow \quad T(\lambda) = \tfrac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} = (-cos(t), \mathrm{sen}(t)) \quad \text{y} \quad T'(t) = (\mathrm{sen}(t), \cos(t))\ ,\\
&\Rightarrow \quad N(t) = \tfrac{T'(\lambda)}{|T'(\lambda)|} = (\mathrm{sen}(t), \cos(t)) \quad \text{y} \quad k(t) = \tfrac{|T'(t)|}{|\alpha'(t)|} = \tfrac{1}{6\,\mathrm{sen}(2t)}\ .
\end{aligned}$$

La evoluta queda:

$$e(t) = \alpha(t) + \frac{N(t)}{k(t)} = 4(\cos(t)(2 - \cos(2t)), \mathrm{sen}(t)(2 + \cos(2t))).$$

C.9. Dada la curva $y = \dfrac{x^3}{6a}$, para $a, x > 0$, haya su evoluta como envolvente de la familia de rectas normales y calcula la ecuación de la circunferencia osculatriz a la curva en el punto $(1, 1/(6a))$.

$\boxed{9}$ Recordamos de nuevo el ejercicio 3 para la ecuación de una recta cualquiera. Como en este caso la curva es una gráfica, se puede parametrizar como $\alpha(t) = (t, t^3/(6a))$. Por lo tanto, como estamos en $\mathbb{R}^2$,

$$\text{un vector tangente es } = \alpha'(t) = \Big(1, \frac{t^2}{2a}\Big), \quad \text{y un vector normal es girar 90º el tangente} = \Big(\frac{t^2}{2a}, -1\Big),$$

y por lo tanto, en cada punto $\alpha(t)$,

$$\text{recta normal} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{t^2}{2a}\Big(y - \frac{t^3}{6a}\Big) + 1(x - t) = 0\Big\}.$$

Por lo tanto la ecuación implícita de la familia de rectas normales es $F(x, y, t) = \dfrac{t^2 y}{2a} + x - t - \dfrac{t^5}{12a^2} = 0$, y podemos plantear las ecuaciones de la envolvente:

$$\left\{\begin{array}{l} F_t = 0\\ F = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{t}{a}y - 1 - \frac{5t^4}{12a^2} = 0\\ \frac{t^2 y}{2a} + x - t - \frac{t^5}{12a^2} = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \frac{a}{t} + \frac{5t^3}{12a}\\ x = t - \frac{t^2}{2a}\Big(\frac{a}{t} + \frac{5t^3}{12a}\Big) + \frac{t^5}{12a^2} = \frac{t}{2} - \frac{t^5}{8a^2}.\end{array}\right.$$

Y, como no hay puntos singulares (ya que $F_y = t^2/(2a)$ es siempre mayor que 0) la parametrización de la envolvente es $e(t) = (\frac{t}{2} - \frac{t^5}{8a^2}, \frac{a}{t} + \frac{5t^3}{12a})$ que, como sabemos de teoría, coincide con la evoluta .

Para la segunda parte **no hay que hacer cuentas** sino aprovechar la información que ya tenemos. Como el punto pedido $(1, 1/(6a))$ es $\alpha(1)$, sabemos que $e(1) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{8a^2}, a + \frac{5}{12a})$ **es el centro de curvatura** y podemos calcular el radio de curvatura simplemente como $R = |\alpha(1) - e(1)| = \frac{1}{8a^2}\sqrt{(1+4a^2)^3}$, la distancia entre ambos puntos. Por lo tanto la circunferencia osculatriz en el punto $\alpha(1)$ es

$$C = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |(x,y) - e(1)|^2 = R^2\Big\} = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \Big(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{8a^2}\Big)^2 + \Big(y - a - \frac{5}{12a}\Big) = \frac{1+4a^2}{64a^4}\Big\}$$

C.10. En la curva $\alpha(t) = (t^3, 3(t^2+t+1), 3t+1)$ con $t \in \mathbb{R}$ hay tres puntos tales que su plano osculador contiene al $(0,0,0)$. Halla la ecuación del plano que contiene a tales puntos.

$\boxed{10}$ Calculamos el plano osculador en general, cuya ecuación podemos calcular como:

$$0 = \begin{vmatrix} (x,y,z) - \alpha(t) \\ \alpha'(t) \\ \alpha''(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - t^3 & y - 3(t^2+t+1) & z - (3t+1) \\ 3t^2 & 6t+3 & 3 \\ 6t & 6 & 0 \end{vmatrix} = -18\Big(x + ty + (t^2+t)z - (t^3+t^2-2t)\Big).$$

Para que el $(0,0,0)$ pertenezca a uno de estos planos, es preciso que este punto cumpla esta ecuación, es decir

$$0 + t0 + (t^2+t)0 - (t^3+t^2-2t) = 0 \iff 0 = t^3+t^2-2t = t(t^2+t-2) = t(t-1)(t+2).$$

Escrito así, es obvio que los tres puntos son los correspondientes a los parámetros $t=0$, $t=1$ y $t=-2$:

$$P_1 = \alpha(0) = (0,3,1), \quad P_2 = \alpha(1) = (1,9,4), \quad y \quad P_3 = \alpha(-2) = (-8,9,-5).$$

Para concluir, el plano que pasa por estos tres puntos tiene por ecuación:

$$0 = \begin{vmatrix} (x,y,z) - P_1 \\ P_2 - P_1 \\ P_3 - P_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y-3 & z-1 \\ 1 & 6 & 3 \\ -8 & 6 & -6 \end{vmatrix} = -18\Big(-3x - y + 3z\Big),$$

es decir, el plano que contiene a los 3 puntos es: $3x + y - 3z = 0$.

C.11. Considera la familia de curvas $\alpha_\lambda(t) = (t^3 - t + \lambda, t^3 - t^2, t^2 - t)$ con $t \in \mathbb{R}$.

11*a*) Calcula, para cada curva de dicha familia, la ecuación del plano osculador en el punto $P = (\lambda, 0, 0)$.

11*b*) Verifica que, sea cual sea el valor de λ, se trata de una curva plana.

$\boxed{11a}$ Notamos que, efectivamente, el punto dado P pertenece a todas las curvas y, de hecho, para todos los valores de λ se tiene $P = \alpha_\lambda(0)$, por lo que calculamos el plano osculador en $t = 0$;

$$0 = \begin{vmatrix} (x,y,z) - P \\ \alpha'_\lambda(0) \\ \alpha''_\lambda(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - \lambda & y & z \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2(\lambda - x + y + z).$$

Por lo tanto el plano es: $x - y - z = \lambda$.

$\boxed{11b}$ Sabemos que si una curva es plana, entonces su traza está contenida en su plano osculador (que será el mismo en todos los puntos). Como hemos calculado ya uno, veamos que $\alpha_\lambda(t)$ cumple la ecuación del plano obtenido para cualquier t:

$$x(t) - y(t) - z(t) = (t^3 - t + \lambda) - (t^3 - t^2) - (t^2 - t) = t^3 - t + \lambda - t^3 + t^2 - t^2 + t = \lambda. \checkmark$$

También podemos hacerlo por el camino largo (largo, en este caso), viendo que su torsión es nula. Recordando una de las fórmulas de la torsión, esto equivale a que el determinante de la matriz formada por la primera, segunda y tercera derivada sea nulo. Hagámoslo:

$$\begin{vmatrix} \alpha'_\lambda(t) \\ \alpha''_\lambda(t) \\ \alpha'''_\lambda(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3t^2-1 & 3t^2-2t & 2t-1 \\ 6t & 6t-2 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

y como sale siempre cero, las curvas son planas, sea cual sea el valor de λ y están contenidas en el plano calculado en el apartado $11a$,como ya sabíamos.

C.12. Dada la curva parametrizada $\alpha(t) = (t, \cosh(t))$, con $t \in \mathbb{R}$, se pide

- $12a)$ Su evoluta.
- $12b)$ El lugar geométrico de los centros de sus circunferencias osculatrices.
- $12c)$ La ecuación de la envolvente de sus rectas normales.
- $12d)$ ¿Existe alguna relación entre estos tres conjuntos?

$\boxed{12}$ Este es, en el fondo, un ejercicio teórico, por lo que solo responderemos al apartado $12d$. Debemos saber, por la teoría, que **¡los tres conjuntos son el mismo!** Como en el ejercicio 9 ya se mostró un ejemplo, en este sólo damos el resultado (el mismo en los tres primeros apartados):

$$e(t) = (t - \cosh(t)\text{senh}(t), 2\cosh(t)).$$

C.13. Considera curva $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ con $t \in \mathbb{R}$.

- $13a)$ Llamando A y B a los puntos de corte de la recta tangente con los planos OXY y OXZ respectivamente, prueba que el cociente $\dfrac{|\overrightarrow{A\alpha(t)}|}{|\overrightarrow{B\alpha(t)}|}$ es constante[a].
- $13b)$ Encuentra los tres puntos de la curva cuyo plano osculador pasa por $(3, 1, -2)$, y halla la ecuación del plano que determinan estos 3 puntos.

[a] La notación $\overrightarrow{PQ}$ indica el vector con orígen en el punto P y estremo en Q, es decir: $\overrightarrow{PQ} = Q - P$.

$\boxed{13a}$ Para calcular A y B, optamos por trabajar con la recta tanjente en paramétricas: $\alpha(t) + \lambda\alpha'(t)$. Como $\alpha'(t) = 3(1, 2t, 2t^2)$, entonces:

$$\text{recta tangente}(t) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} x = 3t + \lambda, & \\ y = 3t^2 + 2\lambda t, & \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2t^3 + 2\lambda t^2, & \end{bmatrix} \right\}.$$

• Para cortar al plano OXY, hacemos $z = 0$, obteniendo $2t^3 + 2\lambda t^2 = 0$ y, por tanto $\lambda = -t$, lo que produce el punto $A = (2t, t^2, 0)$.

• Análogamente, para cortar con el plano OXZ, hacemos $y = 0$, obteniendo $3t^2 + 2\lambda t = 0$ y, por tanto $\lambda = -3t/2$, lo que produce el punto $B = (3t/2, 0, -t^3)$.

Una vez calculados A y B, basta verificar lo pedido:

$$\frac{|\overrightarrow{A\alpha(t)}|}{|\overrightarrow{B\alpha(t)}|} = \frac{|(3t, 3t^2, 2t^3) - (2t, t^2, 0)|}{|(3t, 3t^2, 2t^3) - (3t/2, 0, -t^3)|} = \frac{|(t, 2t^2, 2t^3)|}{|(3t/2, 3t^2, 3t^3)|} = \frac{|(t, 2t^2, 2t^3)|}{3/2|(t, 2t^2, 2t^3)|} = \frac{2}{3}.$$

$\boxed{13b}$ Como este apartado es análogo al ejercicio 10, pasamos a las cuentas directamente. El plano osculador:

$$0 = \begin{vmatrix} (x,y,z)-\alpha(t) \\ \alpha'(t) \\ \alpha''(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3t & y-3t^2 & z-2t^3 \\ 3 & 6t & 6t^2 \\ 0 & 6 & 12t \end{vmatrix} = 18\Big(2t^2x - 2ty + z - 2t^3\Big).$$

Al obligar a que pase por $(3,1,-2)$, obtenemos

$$2t^2 3 - 2t - 2 - 2t^3 = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 = t^3 - 3t^2 + t + 1 = (t-1)(t^2-2t+1) = (t-1)(t-1+\sqrt{2})(t-1-\sqrt{2}).$$

Por lo tanto, los tres puntos son los correspondientes a $t=1$, $t=1+\sqrt{2}$ y $t=1-\sqrt{2}$, respectivamente:

$$P_1 = (3,3,2), \quad P_2 = (3+3\sqrt{2}, 9+6\sqrt{2}, 14+10\sqrt{2}), \; y \; P_3 = (3-3\sqrt{2}, 9-6\sqrt{2}, 14-10\sqrt{2}).$$

Para concluir, el plano que pasa por estos tres puntos tiene por ecuación:

$$0 = \begin{vmatrix} (x,y,z)-P_1 \\ P_2-P_1 \\ P_3-P_1 \end{vmatrix} = 12\sqrt{2}\Big(2x-6y+3z+6\Big),$$

es decir, el plano que contiene a los 3 puntos es: $2x-6y+3z=-6$.

C.14. Dada una curva regular ta que, en todo punto tiene curvatura no nula y su plano osculador para por un punto fijo P de $\mathbb{R}^3$. Prueba que es plana.

$\boxed{14}$ Este es claramente un **ejercicio teórico**, y podemos suponer que la curva está parametrizada por el arco. Requiere pocas cuentas y mucha intuición. La idea es hacer aparecer la torsión para ver que es cero (mediante las fórmulas de Frenet) al derivar en alguna expresión que sepamos que es constante; vamos a ello.

Como el plano osculador siempre contiene al punto P, entonces el vector $\overrightarrow{P\alpha(s)}$ (que va del punto P al punto $\alpha(s)$) ¡siempre! será perpendicular a $B(s)$, ya tenemos una relación constante, cuya derivada será cero:

$$\langle P-\alpha(s), B(s)\rangle = 0, \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{d}{ds}\Big(\langle P-\alpha(s), B(s)\rangle\Big) = -\langle \alpha'(s), B(s)\rangle + \langle P-\alpha(s), B'(s)\rangle,$$

y como $\alpha'(s) = T(s)$ es perpendicular a $B(s)$, el primer término es cero. Para el segundo, usamos las ecuaciones de Frenet, concretamente $B' = -\tau N$, obteniendo

$$0 = \tau\langle P-\alpha(s), N(s)\rangle, \text{ para todo } s \;\Leftrightarrow \begin{cases} \text{o bien } \tau(s) = 0 \;\forall s, & (O1) \\ \text{o bien } \langle P-\alpha(s), N(s)\rangle \;\forall s. & (O2) \end{cases}$$

Intuitivamente, la opción $(O2)$ no puede ocurrir, ya que si $P-\alpha(s)$ fuese siempre perpendicular a N y, como ya lo es a B, entonces siempre estará en la dirección de T (la velocidad T apuntaría a P en todo momento) y α sería una recta, lo que no puede ser por tener curvatura no nula. Veámoslo. Si fuese verdad que $\langle P-\alpha(s), N(s)\rangle = 0$, podríamos derivar y obtener (de forma similar a lo que acabamos de hacer):

$$\frac{d}{ds}\Big(\langle P-\alpha, N\rangle\Big) = -\langle T, N\rangle + \langle P-\alpha, N'\rangle = 0 + \langle P-\alpha, -kT+\tau B\rangle = -k\langle P-\alpha, T\rangle + 0,$$

y al no ser cero la k se tendría que $P-\alpha(s)$ sería también perpendicular a T, osea, sería perpendicular a B desde el principio, a N porque estamos suponiendo $(O2)$ y a T que nos acaba de salir, es decir, tendría que ser el vector cero y por lo tanto α un punto!!!
Descartada entonces $(O2)$, concluimos que la opción $(O1)$ es la correcta, es decir $\tau = 0$ y por lo tanto la curva es plana.

C.15. Considera curva $\alpha(t) = \Big(r\cos\Big(\dfrac{t}{r}\Big), r\,\mathrm{sen}\Big(\dfrac{t}{r}\Big), 2r\,\mathrm{sen}\Big(\dfrac{t}{2r}\Big)\Big)$ con $t \in \mathbb{R}$.

15*a*) Calcula curvatura, torsión y triedro de Frenet en el punto $t = r\,\pi/2$.

15*b*) Prueba que está contenida tanto en una superficie cilíndrica de revolución como en la esfera de ecuación: $(x+r)^2 + y^2 + z^2 = 4r^2$.

15*c*) Calcula la ecuación de la proyección de la curva sobre los planos $x = 0$ e $y = 0$.

$\boxed{15a}$ Hacemos nuestros cálculos preliminares:

$$\alpha'(t) = \Big(-\,\mathrm{sen}\Big(\frac{t}{r}\Big), \cos\Big(\frac{t}{r}\Big), \cos\Big(\frac{t}{2r}\Big)\Big) \;\Rightarrow\; \alpha'\Big(\frac{r\pi}{2}\Big) = \Big(-1, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\Big), \;\; y \;\; \Big|\alpha'\Big(\frac{r\pi}{2}\Big)\Big| = \sqrt{3/2}$$

$$\alpha''(t) = \frac{-1}{r}\Big(\cos\Big(\frac{t}{r}\Big), \mathrm{sen}\Big(\frac{t}{r}\Big), \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\Big(\frac{t}{2r}\Big)\Big) \;\Rightarrow\; \alpha''\Big(\frac{r\pi}{2}\Big) = \frac{-1}{r}\Big(0, 1, \frac{\sqrt{2}}{4}\Big),$$

$$\alpha''(t) = \frac{1}{r^2}\Big(\mathrm{sen}\Big(\frac{t}{r}\Big), -\cos\Big(\frac{t}{r}\Big), \frac{1}{4}\cos\Big(\frac{t}{2r}\Big)\Big) \;\Rightarrow\; \alpha'\Big(\frac{r\pi}{2}\Big) = \frac{1}{r^2}\Big(1, 0, \frac{-\sqrt{2}}{2}\Big).$$

Y ahora, todo en el punto $r\pi/2$, los que faltan:

$$\alpha' \times \alpha'' = \frac{-1}{r}\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{\mathrm{k}} \\ -1 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2}/4 \end{vmatrix} = \frac{1}{r}\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{4}, 1\Big) \;\Rightarrow\; |\alpha' \times \alpha''| = \sqrt{\frac{13}{8r^2}} \;\; y \;\; (\alpha' \times \alpha'')\cdot\alpha''' = \frac{3}{4\sqrt{2}r^3},$$

por último, también en el punto $r\pi/2$:

$$T = \frac{\alpha'}{|\alpha'|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2}, 0, 1), \qquad B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{|\alpha' \times \alpha''|} = \frac{1}{\sqrt{13}}(2, -1, 2\sqrt{2})$$

$$N = B \times T = \frac{-1}{\sqrt{3}\sqrt{13}}(1, 6, \sqrt{2}), \qquad k = \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3} = \sqrt{\frac{13}{27r^2}}, \;\; y \;\; \tau = \frac{(\alpha' \times \alpha'')\cdot\alpha'''}{|\alpha' \times \alpha''|^2} = \frac{-3\sqrt{2}}{13r}.$$

$\boxed{15b}$ Por la expresión de α, es fácil notar que cumple $x^2 + y^2 = r^2$, por lo que está contenida en este cilindro. Para la esfera, basta hacer el cálculo:

$$(x(t)-r)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = \overbrace{r^2\cos^2\Big(\frac{t}{r}\Big)} + 2r^2\underbrace{\cos\Big(\frac{t}{r}\Big)} + \overbrace{r^2} + \overbrace{r^2\,\mathrm{sen}^2\Big(\frac{t}{r}\Big)} + 4r^2\,\mathrm{sen}^2\Big(\frac{t}{2r}\Big)$$

$$= \overbrace{2r^2} + 2r^2\underbrace{\Big(2\cos^2\Big(\frac{t}{2r}\Big) - 1\Big)} + 4r^2\,\mathrm{sen}^2\Big(\frac{t}{2r}\Big) = 4r^2.$$

$\boxed{15c}$ La proyección sobre $y = 0$ es $\alpha_1(t) = \Big(r\cos\big(\frac{t}{r}\big), 0, 2r\,\mathrm{sen}\big(\frac{t}{2r}\big)\Big)$ y, comenzando por $z(t)^2$ y jugando con las fórmulas trigonimétricas, obtenemos

$$z^2 = 4r^2\,\mathrm{sen}^2\Big(\frac{t}{2r}\Big) = 2r^2\Big(1 - \cos\Big(\frac{t}{r}\Big)\Big) = 2r^2 - 2rx(t),$$

es decir, la parábola $x = r - z^2/(2r)$. Por otro lado, la proyección sobre $y = 0$ es $\alpha_2(t) = \Big(0, r\,\mathrm{sen}\big(\frac{t}{r}\big), 2r\,\mathrm{sen}\big(\frac{t}{2r}\big)\Big)$. En este caso, comenzando con y^2 y usando la fórmula del seno del ángulo doble obtenemos

$$y^2 = r^2\,\mathrm{sen}^2\Big(\frac{t}{r}\Big) = 4r^2\,\mathrm{sen}^2\Big(\frac{t}{2r}\Big)\cos^2\Big(\frac{t}{2r}\Big) = z(t)^2\Big(1 - \mathrm{sen}^2\Big(\frac{t}{2r}\Big)\Big) = z^2(t)\Big(1 - \frac{z^2(t)}{4r^2}\Big),$$

es decir, la curva con ecuación implícita $4r^2y^2 = z^2(4r^2 - z^2)$.

C.16. Consideramos la curva $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2, z = x^3\}$

16*a*) Calcula la curvatura y la torsión en un punto genérigo.

16*b*) Proyecta el $(0, 0, 0)$ sobre el plano osculador de cada punto de la curva y calcula el lugar geométrico de dichas proyecciones.

$\boxed{16a}$ En este caso, podemos parametrizar la curva fácilmente como $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$. Hacemos los cálculos

$$\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2), \quad \alpha''(t) = (0, 2, 6t), \quad \alpha'''(t) = (0, 0, 6);$$

de donde

$$\alpha' \times \alpha'' = 2(3t^2, -3t, 1), \quad k = \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3} = \frac{2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}{\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}^3} \text{ y } \tau = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''}{|\alpha' \times \alpha''|^2} = \frac{3}{9t^4 + 9t^2 + 1}$$

$\boxed{16b}$ En general, **la proyección de un punto Q sobre un plano** cuya ecuación implícita venga dada por la expresión: $ax + by + cz = d$ (entonces, $\vec{n} = (a, b, c)$ es un vector normal al plano) se calcula como

$$proy(Q) = Q + \frac{d - \vec{n} \cdot Q}{|\vec{n}|^2}\vec{n}.$$

En nuestro caso, $Q = (0, 0, 0)$ produce $proy(Q) = \frac{d}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$. Como vector normal al plano osculador podemos tomar $\vec{n} = \alpha' \times \alpha'' = (3t^2, -3t, 1)$, que ya está calculado, y para calcular d, simplemente hacemos $d = \vec{n} \cdot \alpha = t^3$, es decir,

$$\text{plano osculador: } 3t^2\,x - 3t\,y + z = t^3, \quad \text{proyección: } \frac{t^3}{9t^4 + 9t^2 + 1}(3t^2, -3t, 1).$$

Nota. Observar que si se calcula la ecuación del plano osculador como usualmente:

$$0 = \begin{vmatrix} (x, y, z) - \alpha \\ \alpha' \\ \alpha'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - t & y - t^2 & z - t^3 \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 2(3t^2\,x - 3t\,y + z - t^3),$$

sale lo mismo, $\vec{n} = (3t^2, -3t, 1)$ y $d = t^3$.

C.17. Dada la hélice circular $\alpha(t) = (r\cos(t) - a, r\,\mathrm{sen}(t) - b, vt)$ con $r > 0$, $t \in \mathbb{R}$ prueba que su evoluta $e(t)$ es otra hélice coaxial (del mismo eje $\{(a, b, z) : z \in \mathbb{R}\}$) y con el mismo paso v que α. Comprueba, además, que el producto de las torsiones de $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ es igual al cuadrado de la curvatura de α.

$\boxed{17}$ Ya hemos hecho varios ejercicios de evolutas, de modo que sólo indicamos los resultados principales para poder compararlos.

$$T(t) = \frac{\alpha'}{|\alpha'|} = \frac{(-r\,\mathrm{sen}(t), r\cos(t), v)}{\sqrt{v^2 + r^2}}, \quad N(t) = \frac{T'}{|T'|} = (-\cos(t), \mathrm{sen}(t), 0), \qquad k(t) = \frac{|T'|}{|\alpha'|} = \frac{r}{v^2 + r^2},$$

y finalmente

$$e(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)}N(t) = \Big(\frac{-v^2\cos(t)}{r} - a, \frac{-v^2\,\mathrm{sen}(t)}{r} - b, vt\Big).$$

que es, efectivamente, otra hélice con el mismo eje y paso (pero con radio v^2/r). Con respecto a las torsiones, resulta que

$$\tau_\alpha(t) = \frac{v}{v^2 + r^2} \;\text{ y }\; \tau_e(t) = \frac{r^2}{v(v^2 + r^2)} \quad \Rightarrow \quad \tau_\alpha(t)\tau_e(t) = \frac{v\,r^2}{v(v^2 + r^2)^2} = \Big(\frac{r}{v^2 + r^2}\Big)^2 = k(t)^2.$$

C.18. Dada la curva $\alpha(t) = e^t(\cos(t), \operatorname{sen}(t), 1)$ con $t \in \mathbb{R}$, se pide:

18a) comprueba que su traza está contenida en el cono $z^2 = x^2 + y^2$;

18b) demuestra que la distancia de cada punto al eje del cono es un múltiplo constante del radio de curvatura;

18c) calcula la torsión en cada punto.

$\boxed{18a}$ Inmediata comprobación, $x^2 + y^2 = e^{2t} = z^2$.
$\boxed{18b}$ El eje de este cono es el eje OZ. Como la distancia de un punto cualquiera (a, b, c) al eje OZ es $\sqrt{a^2 + b^2}$, en este caso obtenemos

$$\text{distancia } \{\alpha(t), \text{ eje } OZ\} = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = e^t.$$

Para calcular el radio de curvatura, hacemos

$$T = \frac{\alpha'}{|\alpha'|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos(t) - \operatorname{sen}(t), \cos(t) + \operatorname{sen}(t), 1), \quad y \quad k = \frac{|T'|}{|\alpha'|} = \frac{\sqrt{2}}{3e^t}, \Rightarrow \ R = \frac{3}{\sqrt{2}}e^t,$$

lo que demuestra 18b. Para la torsión, indicamos algunos pasos:

$$\alpha' = e^t(\cos(t) - \operatorname{sen}(t), \cos(t) + \operatorname{sen}(t), 1); \qquad \alpha'' = e^t(-2\operatorname{sen}(t), 2\cos(t), 1);$$
$$\alpha'''(t) = e^t(-2\cos(t) - 2\operatorname{sen}(t), 2\cos(t) - 2\operatorname{sen}(t), 1); \qquad \alpha' \times \alpha'' = e^{2t}(-\cos(t) + \operatorname{sen}(t), \cos(t) + \operatorname{sen}(t), 2);$$

lo que produce $det(\alpha', \alpha'', \alpha''') = 2e^{3t}$, $|\alpha' \times \alpha''| = \sqrt{6}e^{2t}$ y finalmente $\tau = e^{-t}/3$.

C.19. Dada la curva $\alpha(t) = (at, bt^2, ct^3)$ con a, b, c no nulas:

19a) Halla la curvatura y la torsión en un punto genérico.

19b) Determina si hay alguna elección de a, b y c para la cual resulte una hélice[a].

[a] Una curva es una hélice si y solamente si el cociente τ/k es constante.

$\boxed{19a}$ Hacemos directamente los cálculos

$$\alpha'(t) = (a, 2bt, 3ct^2), \qquad \alpha''(t) = (0, 2b, 6ct), \qquad \alpha'''(t) = (0, 0, 6c);$$

$$\alpha' \times \alpha'' = (6bct^2, -6act, 2ab), \quad k = \frac{2\sqrt{(3bc)^2t^4 + (3ac)^2t^2 + (ab)^2}}{\sqrt{(3c)^2t^4 + (2b)^2t^2 + a^2}^3} \ y \ \tau = \frac{3abc}{(3bc)^2t^4 + (3ac)^2t^2 + (ab)^2}.$$

$\boxed{19b}$ Trabajando un poco, podemos escribir τ/k como

$$\frac{\tau}{k} = \frac{3abc}{2}\sqrt{\left(\frac{a^2 + 4b^2t^2 + 9c^2t^4}{a^2b^2 + 9a^2c^2t^2 + 9b^2c^2t^4}\right)^3}$$

y, para que eso no dependa de t sería preciso que el radicando sea constante, esto es,

$$F := \frac{a^2 + 4b^2t^2 + 9c^2t^4}{a^2b^2 + 9a^2c^2t^2 + 9b^2c^2t^4} \stackrel{?}{=} cte.$$

Como ser constante, es tener derivada nula, la derivamos, obteniendo

$$\frac{dF}{dt} := -\frac{2(9a^2c^2 - 4b^4)t(a^2 - 9c^2t^4)}{(a^2b^2 + 9a^2c^2t^2 + 9b^2c^2t^4)^2} \stackrel{?}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9a^2c^2 - 4b^4 = 0,$$

por lo que toda combinación de a, b, c que cumpla $2b^2 = \pm 3ac$ (por ejemplo $a = 2$, $b = 3$ y $c = 3$), dará lugar a una hélice.

C.20. Halla el lugar geométrico de los puntos que resultan al intersecarse las rectas tangentes a la curva del ejercicio 16 con los planos ortogonales a dichas rectas tangentes que contienen al punto $P = (0, 0, 0)$. El conjunto resultante se llama *podaria*

$\boxed{20}$ Antes de comenzar este ejercicio, veámos cómo calcular esta **PODARIA** en general. Dada una curva α y un punto P cualquiera, se define la podaria de α respecto de P como el lugar que ocupan todas las proyecciones de P sobre las distintas rectas tangentes de la curva α (nótese que en realidad es lo mismo que dice el enunciado del ejercicio).

Así, para cada t, sabemos que el punto buscado de la podaria (llámese $\beta(t)$) ha de estar en la recta tangente a la curva en el punto $\alpha(t)$; por lo tanto, para cierto λ_0, se tiene

$$\beta(t) = \alpha(t) + \lambda_0 \alpha'(t).$$

Para calcular λ_0, basta recordar la definición de proyección, esto es, el vector $\overrightarrow{P\beta(t)} = \beta(t) - P$ ha de ser perpendicular a la recta tangente, es decir, a $\alpha'(t)$. Por ello, su producto escalar es cero

$$\Big(\beta(t) - P\Big) \cdot \alpha'(t) = 0 \ \Leftrightarrow\ \Big(\alpha(t) - P\Big) \cdot \alpha'(t) + \lambda_0\, \alpha'(t) \cdot \alpha'(t) = 0.$$

Despejando λ_0, obtenemos el lugar de la podaria:

$$\beta(t) = \alpha(t) - \frac{(\alpha(t) - P) \cdot \alpha'(t)}{|\alpha'(t)|^2} \alpha'(t).$$

En el ejercicio $\boxed{20}$, tenemos $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ y $P = (0, 0, 0)$, por lo que, simplemente, hacemos los cálculos indicados

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) &= (1, 2t, 3t^2), \\
\alpha(t) \cdot \alpha'(t) &= t + 2t^3 + 3t^5, \\
|\alpha'(t)|^2 &= 1 + 4t^2 + 9t^4, \\
\textit{podaria} &= \frac{t^2}{1 + 4t^2 + 9t^4}\Big(6t^3 + 2t,\ 3t^4 - 1,\ -2t^3 - 2t\Big).
\end{aligned}$$

C.21. Sea α p.p.a. con torsión τ constante y tómese

$$\beta(s) := \frac{-N(s)}{\tau} + \int_0^s B(u)du.$$

21*a*) ¿Está β parametrizada por el arco?

21*b*) Calcula la curvatura de β y prueba que, cuando α está p.p.a., entonces esta curvatura es $\pm\tau$.

$\boxed{21a}$ Derivamos y usamos las fórmulas de Frenet para $N'(s)$, obteniendo:

$$\beta'(s) = \frac{-N'(s)}{\tau} + B(s) = \frac{k(s)T(s) - \tau\, B(s)}{\tau} + B(s) = \frac{k(s)}{\tau} B(s).$$

Por lo tanto $|\beta'(s)| = k(s)/|\tau|$ que, obviamente, no tiene por qué ser 1 (por ejemplo, en las hélices hemos visto cómo esta cantidad varía con el radio).

$\boxed{21b}$ Como hemos calculado $\beta'(s)$, normalizando tenemos su tangente $T_\beta(s) = -B(s)$ (hemos añadido el subíndice para no confundir con el tangente de α, igual haremos con los elementos que siguen). Para calcular su curvatura, aplicamos una de las fórmulas de clase:

$$k_\beta(s) = \frac{|T'_\beta(s)|}{|\beta'(s)|} = \frac{|-B'(s)|}{k(s)/|\tau|}, \tag{1}$$

usando de nuevo la fórmula de Frenet (que podemos usar, porque α sí está p.p.a.): $B'(s) = -\tau N(s)$, queda

$$k_\beta(s) = \frac{|\tau|}{k(s)/|\tau|} = \frac{\tau^2}{k(s)}.$$

Para el caso en que α está p.p.a., volvemos atrás, hasta la fórmula (1), y desde ahí notamos que:

$$k_\beta(s) = |T'_\beta(s)| = |-B'(s)| = |\tau N(s)| = |\tau|,$$

como queríamos probar.

NOTA. Para calcular $k_\beta(s)$ también se puede usar la fórmula: $k_\beta(s) = |\beta'(s) \times \beta''(s)|/|\beta'(s)|^3$, en este caso:

$$\beta''(s) = \frac{k'(s)}{\tau} B(s) + \frac{k(s)}{\tau} B'(s) = \frac{k'(s)}{\tau} B(s) + \frac{k(s)}{\tau}(-\tau N(s)),$$

$$\Rightarrow \ \beta'(s) \times \beta''(s) = \frac{kk'}{\tau} \overbrace{B \times B}^{0} - \frac{kk}{\tau} \overbrace{B \times N}^{-T} = \frac{k(s)^2}{\tau} T(s)$$

y se obtiene (¡menos mal!) lo mismo

$$k_\beta(s) = \frac{|\beta'(s) \times \beta''(s)|}{|\beta'(s)|^3} = \frac{k^2/\tau}{(k/\tau)^3} = \frac{\tau^2}{k(s)}.$$

C.22. De una curva p.p.a. se sabe que el binormal en cada punto es $B(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(-\sqrt{1-s^2}, -s, 1\Big)$, para cada $t \in (-1, 1)$ y que su torsión es constantemente 1. Haya los restantes elementos del triedro de Frenet y una posible parametrización de α.

C.23. Considera la familia de curvas $\alpha_\lambda(t) = (t^2 + \lambda t^3, 3t^2 - t, 5 - t)$ con $t \in \mathbb{R}$.
Determina los valores de λ para los que α es plana y, para dichos valores, calcula el plano osculador y la circunferencia osculatriz en el punto $(1, 2, 4)$.

C.24. Determina la evoluta y la circunferencia osculatriz en el punto $P = (2, 0)$ de la curva plana cuya traza es $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 - 4(x^2 + y^2) = 0\}$.

$\boxed{24}$ Despejando x en función de y (o al revés), la podemos ver como un grafo. En este caso es una bicuadrática en x (de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$), por lo que

$$x^2 = 2(1 + \sqrt{1 + y^2}) \ \text{ que produce dos ramas } \quad \begin{cases} \alpha_1(t) = (\sqrt{2 + 2\sqrt{1 + t^2}}, t), & t \in \mathbb{R}, \\ \alpha_2(t) = (-\sqrt{2 + 2\sqrt{1 + t^2}}, t), & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

C.25. Si C es la gráfica de una función regular $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, demuestra que la curvatura en cada punto $(x, f(x))$ se puede calcular como

$$k = \frac{f''(x)}{\Big(1 + f'(x)^2\Big)^{3/2}}.$$

C.26. Considera la curva $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$ con $t \in \mathbb{R}$.

26*a*) Prueba que $k(t) = \tau(t)$ en todo punto.

26*b*) Demuestra que la recta tangente en cada punto forma un ángulo constante con el vector $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + B)$.

26*c*) ¿de qué curva se trata?

C.27. Dada la curva

$$\alpha(t) = \Big(\frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^t \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}dt, \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^t \frac{\text{sen}(t)}{\sqrt{t}dt},\ a>0,\quad t\in\mathbb{R}^+,\Big)$$

27a) Halla la longitud del arco recorrido entre $t=0$ y $t=\pi/2$.

27b) Calcula el centro de la circunferencia osculatriz en el punto $(0, a\sqrt{\pi})$.

C.28. De una curva $\alpha(t) = (2t, 2t^2, 2)$ se conoce su evoluta $e(t) = (-8t^3, 1+6t^2, 2)$; calcula el radio de curvatura en cada punto.

$\boxed{28}$ Como tenemos la evoluta (los centros de las circunferencias osculatrices) el radio de curvatura es la distancia entre $\alpha(t)$ y $e(t)$:

$$R(t) = |\alpha(t) - e(t)| = \sqrt{(2t+8t^3)^2 + (2t^2-1-6t^2)^2 + 0} = \sqrt{(1+4t^2)^3}.$$

C.29. Calcula la evoluta de una circunferencia cuyo centro no sea el origen.

$\boxed{29}$ La respuesta es: el centro de la circunferencia. Sólo hemos de recordar conceptos: la evoluta de una curva es, en cada punto, el centro de la circunferencia osculatriz a dicha curva, pero cuando la curva ya es una circunferencia, la circunferencia osculatriz es –obviamente– ¡ella misma!

Pero como nos piden las cuentas, las hacemos. Partimos de una circunferencia cualquiera de radio R y centro en (a,b):

$$\alpha(t) = (R\cos(t) + a, R\,\text{sen}(t) + b),$$

y calculamos paso a paso su evoluta.

$$\alpha'(t) = (-R\,\text{sen}(t), R\cos(t)) \quad\Rightarrow\quad T(t) = \tfrac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} = (-\text{sen}(t), \cos(t)) \quad \text{y} \quad T'(t) = (-\cos(t), \text{sen}(t))\ ,$$
$$\Rightarrow\quad N(t) = \tfrac{T'(t)}{|T'(t)|} = (-\cos(t), \text{sen}(t)) \quad \text{y} \quad k(t) = \tfrac{|T'(t)|}{|\alpha'(t)|} = \tfrac{1}{R}.$$

Con todos estos datos, verificamos que, efectivamente, la evoluta de la circunferencia α es constantemente su centro (a,b).

$$e(t) = \alpha(t) + \frac{N(t)}{k(t)} = \Big(R\cos(t) + a, R\,\text{sen}(t) + b\Big) + R\Big(-\cos(t), \text{sen}(t)\Big) = (a,b).$$