Universidad de Granada
Dept. Matemática Aplicada
ETS Caminos, Canales y Puertos

Control 4: parcial de curvas y superficies
10–nov–2017

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

GRADO EN INGENIERÍA CIVIL

1. Justifica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   1.a) En una superficie regular S reglada, todo punto umbilical es plano.

   1.b) Existe una curva plana $\alpha(t)$ cuyo plano osculador en cada punto es $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = t\}$.

   1.c) Si α es una curva regular y β es una recta en $\mathbb{R}^3$ que corta a α en un punto P_0, entonces la superficie de traslación con parametrización: $X(u,v) = \alpha(u) + \beta(v) - P_0$ es reglada.

Solución. 1.a) En un punto umbilical las dos curvaturas principales son iguales: $k_1 = k_2 = k$. Entonces, por un lado tenemos que la curvatura de Gauss es $K = k^2 \geq 0$ y, por otro, como es reglada: $K \leq 0$, por lo que ha de ser cero, $K = k = 0$ y entonces, efectivamente, el punto es plano.

1.b) Imposible, si fuese plana, su traza estaría contenida en un plano que coincidiría con el osculador en un punto cualquiera, esto es, debe ser el mismo para todo punto $\alpha(t)$, pero el plano descrito se mueve con el parámetro t.

1.c) Cierto, basta describir la recta β explícitamente. Como pasa por el punto P_0, llamamos $Q \in \mathbb{R}^3$ a su vector director, y la recta quedará parametrizada como $\beta(t) = P_0 + t\,Q$. Ahora escribimos X:

$$X(u,v) = \alpha(u) + \beta(v) - P_0 = \alpha(u) + P_0 + v\,Q - P_0 = \alpha(u) + v\,Q,$$

y constatamos que es reglada (de hecho, un cilindro) con directriz α y generatrices constantes $\mathrm{w}(t) = Q$.

2. Considera la curva $\alpha(t) = e^{-t}(\cos(t), \operatorname{sen}(t), 1)$ con $t \in \mathbb{R}$.

   2.a) Comprueba que su traza está contenida en el cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

   2.b) Demuestra que la distancia de cada punto al eje del cono es un múltiplo constante del radio de curvatura.

   2.c) Calcula la torsión en cada punto.

Solución. $2a$. Inmediata comprobación, $x^2 + y^2 = e^{-2t} = z^2$.
$2b$. El eje de este cono es el eje OZ. Como la distancia de un punto cualquiera (a,b,c) al eje OZ es $\sqrt{a^2+b^2}$, en este caso obtenemos

$$\text{distancia } \{\alpha(t), \text{ eje } OZ\} = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = e^{-t}.$$

Para calcular el radio de curvatura, hacemos

$$T = \frac{\alpha'}{|\alpha'|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\cos(t) - \operatorname{sen}(t), \cos(t) - \operatorname{sen}(t), 1), \quad y \quad k = \frac{|T'|}{|\alpha'|} = \frac{\sqrt{2}}{3e^{-t}}, \;\Rightarrow\; R = \frac{3}{\sqrt{2}}e^{t},$$

lo que demuestra $2b$. Para la torsión pedida en $2c$, indicamos los cálculos:

$$\alpha' = e^{-t}(-\cos(t) - \operatorname{sen}(t), \cos(t) - \operatorname{sen}(t), 1); \qquad \alpha'''(t) = e^{-t}(2\cos(t) - 2\operatorname{sen}(t), 2\cos(t) + 2\operatorname{sen}(t), -1);$$
$$\alpha'' = e^{-t}(2\operatorname{sen}(t), -2\cos(t), 1); \qquad \alpha' \times \alpha'' = e^{-2t}(-\cos(t) - \operatorname{sen}(t), \cos(t) - \operatorname{sen}(t), 2);$$

lo que produce $det(\alpha', \alpha'', \alpha''') = -2e^{-3t}$, $|\alpha' \times \alpha''|^2 = 6e^{-4t}$ y finalmente $\tau = \frac{det(\alpha',\alpha'',\alpha''')}{|\alpha' \times \alpha''|^2} = -e^{t}/3$.

3. Considera la superficie $S = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + (y+1)^2 - (z-1)^2 = 0\Big\}$.

   3.a) Proporciona una parametrización de la misma en forma reglada.

   3.b) Haya todas rectas de $\mathbb{R}^3$ contenidas en S y que pasan por el punto $P = (0,0,2)$.

   3.c) Clasifica el punto P e indica si la superficie es desarrollable o no.

Solución. 3a. Es importante reconocer al paraboloide hiperbólico (la silla de montar) tras la ecuación implícita de S, pues repitiendo la misma idea que usamos con el estándard (cuando una variable es el producto de las otras 2), obtendremos la parametrización en forma reglada. Operamos

$$x = (z-1)^2 - (y+1)^2 = \overbrace{(z+y)}^{u}\overbrace{(z-y-2)}^{v} \Rightarrow \begin{cases} x = uv \\ z+y = u \\ z-y-2 = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = uv \\ y = \frac{u-v-2}{2} \\ z = \frac{u+v+2}{2} \end{cases}$$

y nos queda la parametrización reglada

$$X(u,v) = \left(uv, \frac{u-v-2}{2}, \frac{u+v+2}{2}\right) = \overbrace{\left(0, \frac{u-2}{2}, \frac{u+2}{2}\right)}^{\alpha(u)} + v\,\overbrace{\left(u, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)}^{\mathrm{w}(u)}.$$

3b. El punto dado $(0,0,2)$ es $X(2,0)$ de modo que las rectas contenidas en él son las rectas correspondientes a $X(2,v)$ y $X(u,0)$, esto es, respectivamente

$$\begin{cases} x + 4y = 0 \\ z + y = 2 \end{cases} \qquad \& \qquad \begin{cases} x = 0 \\ z = y + 2 \end{cases}$$

3c Sabemos que todos los puntos del paraboloide hiperbólico son hiperbólicos y que (por lo tanto) no es desarrollable, pero por si no lo recordamos, hacemos las cuentas en el punto $(0,0,2) = X(2,0)$:

$$X_u = (v, 1/2, 1/2),\ y\ X_v = (u, -1/2, 1/2)\ \Rightarrow X_u(2,0) = (0, 1/2, 1/2)\ y\ X_v(2,0) = (2, -1/2, 1/2)$$

de donde obtenemos fácilmente $N(2,0) = \frac{1}{3}(1,2,-2)$. No necesitamos el valor de E, F y G, por lo que calculamos las segundas derivadas (aunque ya sabemos que $g = 0$ por teoría), que, en este caso, valen igual en todos los puntos:

$$X_{uu} = (0,0,0), \quad X_{vv} = (0,0,0), \quad X_{uv} = (1,0,0)$$

de donde $e = g = 0$ y $f = N \cdot X_{u,v} = 1/3$. Por lo tanto

$$K(2,0) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-1/9}{(EG - F^2)} < 0,$$

y el punto es hiperbólico. Como K en este punto no es cero, la superficie es no desarrollable.