Universidad de Granada
Dept. Matemática Aplicada
ETS Caminos, Canales y Puertos

Control 1: Curvas

10–oct–2017

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

GRADO EN INGENIERÍA CIVIL

Calcula la evoluta de una circunferencia cuyo centro no sea el origen.

Solución. La respuesta es: el centro de la circunferencia. Sólo hemos de recordar conceptos: la evoluta de una curva es, en cada punto, el centro de la circunferencia osculatriz a dicha curva, pero cuando la curva ya es una circunferencia, la circunferencia osculatriz es –obviamente– ¡ella misma!

Pero como nos piden las cuentas, las hacemos. Partimos de una circunferencia cualquiera de radio R y centro en (a, b):

$$\alpha(t) = (R\cos(t) + a, R\,\mathrm{sen}(t) + b),$$

y calculamos paso a paso su evoluta.

$$\alpha'(t) = (-R\,\mathrm{sen}(t), R\cos(t)) \quad \Rightarrow \quad T(t) = \tfrac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} = (-\,\mathrm{sen}(t), \cos(t)) \quad \text{y} \quad T'(t) = (-\cos(t), \mathrm{sen}(t))\ ,$$
$$\Rightarrow \quad N(t) = \tfrac{T'(t)}{|T'(t)|} = (-\cos(t), \mathrm{sen}(t)) \quad \text{y} \quad k(t) = \tfrac{|T'(t)|}{|\alpha'(t)|} = \tfrac{1}{R}.$$

Con todos estos datos, verificamos que, efectivamente, la evoluta de la circunferencia α es constantemente su centro (a, b).

$$e(t) = \alpha(t) + \frac{N(t)}{k(t)} = \Big(R\cos(t) + a, R\,\mathrm{sen}(t) + b\Big) + R\Big(-\cos(t), \mathrm{sen}(t)\Big) = (a, b).$$