Universidad de Granada
Dept. Matemática Aplicada
ETS Caminos, Canales y Puertos

Control final

22–enero–2017

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

GRADO EN INGENIERÍA CIVIL

1. Justifica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1.a) Si una superficie regular reglada resulta ser, además, superficie de revolución, entonces no puede ser alabeada.

1.b) Si $\alpha(t)$ es la curva $(\cos(t)+\operatorname{sen}(t),\, \operatorname{sen}(t)-\cos(t),\, 2t)$ y su evoluta viene dada por la expresión $e(t) = (-2\cos(t)-2\operatorname{sen}(t),\, 2\cos(t)-2\operatorname{sen}(t),\, 2t)$ entonces su radio de curvatura en cualquier punto es $3\sqrt{2}$.

1.c) Es posible construir una curva plana y regular con curvatura positiva y vector normal constante.

1.d) Si una superficie regular reglada resulta ser, además, superficie de revolución, entonces no puede ser desarrollable.

Solución. La 1.a) es falsa, pues el hiperboloide $x^2+y^2=1+z^2$ es regular, reglado y de revolución pero su curvatura es negativa en todo punto, por lo que es alabeada.

El 1.b) es cierto, sólo hemos de recordar la relación $R(t)=|e(t)-a(t)|$. En este caso:

$$\begin{aligned} R(t) &= |(-3\cos(t)-3\operatorname{sen}(t),\, 3\cos(t)-3\operatorname{sen}(t),\, 0)| = \sqrt{9(\cos(t)+\operatorname{sen}(t))^2+9(\cos(t)-\operatorname{sen}(t))^2} \\ &= \sqrt{9\Big(\cos^2(t)+\operatorname{sen}^2(t)+2\cos(t)\operatorname{sen}(t)+\cos^2(t)+\operatorname{sen}^2(t)-2\cos(t)\operatorname{sen}(t)\Big)} = \sqrt{18}=3\sqrt{2}, \end{aligned}$$

por lo que se confirma que la afirmación es cierta.

El 1.c) es falso. Hay varias formas de verlo; por ejemplo, usando la ecuación de Frenet: $N'=\tau B-kT$. En este caso tenemos $\tau=0$ (por ser plana) y $N'=0$ (porque N es constante) por lo que nos queda $kT=0$. Y como ha de tener curvatura k positiva, entonces el tangente T ha de valer cero, lo que es imposible....

La 1.d) es falsa, pues el cilindro $x^2+y^2=1$ es regular, reglado y de revolución pero su curvatura es cero en todo punto, por lo que es desarrollable.

2. Considera la circunferencia en $\mathbb{R}^2$ de centro $(1,5)$ y radio 2.

a) Parametrízala y determina, a través de su ecuación implícita, la familia de rectas tangentes a dicha circunferencia.

b) Calcula la envolvente de dicha familia.

c) Calcula centro y radio de la circunferencia osculatriz a dicha envolvente en el punto $P=(3,5)$.

Solución. Primero resolveremos el 2.b) y el 2.c) ya que no requieren de cáculo alguno.

Hemos de saber que la envolvente de la familia de rectas tangentes de cualquier curva es la propia curva; en este caso, la circunferencia de la que partimos. Esto responde al 2.b) sin hacer ni una sola cuenta.

También es obvio que la circunferencia osculatriz (la que mejor aproxima) en cualquier punto de una circunferencia es la propia circunferencia. Por lo tanto el centro es el $(1,5)$ y el radio es 2

Resolvemos ahora el 2.a). La parametrización más simple: $\alpha(t)=(1+2\cos(t),5+2\sin(t))$. La recta tangente en cada punto puede ser descrita como

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \langle (x,y)-\alpha(t), N(t)\rangle = 0\},$$

siendo $\langle (x,y)-\alpha(t), N(t)\rangle=0$ su ecuación implícita. Por ello, solo necesitamos $N(t)$. Hacemos los cálculos, que resultan muy simples:

$$\begin{aligned} \alpha'(t)=(-2\operatorname{sen}(t),2\cos(t)) \quad &\Rightarrow \quad T(t)=\tfrac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}=(-\operatorname{sen}(t),\cos(t)) \ \text{ y } \ T'(t)=(-\cos(t),-\operatorname{sen}(t)) \ , \\ &\Rightarrow \quad N(t)=\tfrac{T'(t)}{|T'(t)|}=(-\cos(t),-\operatorname{sen}(t)) \ . \end{aligned}$$

Así la familia se rectas tangentes cumplen

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (x,y)-\alpha(t), N(t)\rangle = \langle (x-1-2\cos(t), y-5-2\sin(t)), (-\cos(t), -\operatorname{sen}(t))\rangle \\ &= (1-x)\cos(t)+(5-y)\operatorname{sen}(t)+2\cos^2(t)+2\operatorname{sen}^2(t) = (1-x)\cos(t)+(5-y)\operatorname{sen}(t)+2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación que define la familia de rectas tangentes es

$$F(x,y;t)=0, \quad \textit{siendo} \quad F(x,y;t)=(x-1)\cos(t)+(y-5)\operatorname{sen}(t)-2.$$

Por último, y aunque **no es necesario**, resolvemos el 2.b) y el 2.c) haciendo cuentas, que también se puede. Planteamos las ecuaciones de la envolvente (el parámero aquí se llama t en vez de λ):

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x,y;t) = -(x-1)\operatorname{sen}(t)+(y-5)\cos(t)=0, \quad y \quad F(x,y,\lambda)=(x-1)\cos(t)+(y-5)\operatorname{sen}(t)-2=0,$$

que, escrito como sistema, resulta más sencillo:

$$\begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(t) & \cos(t) \\ \cos(t) & \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(t)+5\cos(t) \\ \cos(t)+5\operatorname{sen}(t)+2 \end{pmatrix}.$$

Resolvemos calculando la inversa (que es muy fácil de calcular y sale ella misma):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(t) & \cos(t) \\ \cos(t) & \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(t)+5\cos(t) \\ \cos(t)+5\operatorname{sen}(t)+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\cos(t) \\ 5+2\operatorname{sen}(t) \end{pmatrix} = \alpha(t),$$

como tenía que ser.

Podemos también resolver el 2.c) haciendo todas las cuentas, pero aprovechando las que ya hemos hecho, pues la envolvente coincide con α. Observamos primero que $(3,5)=\alpha(0)$. Por otro lado, ya tenemos calculados:

$$\alpha'(0)=(0,2), \qquad T'(0)=(-1,0), \quad y \quad N(0)=(-1,0),$$

y entonces

$$\textit{Radio} = \frac{1}{k(0)} = \frac{|\alpha'(0)|}{|T'(0)|} = 2, \quad y \quad \textit{centro} = \alpha(0)+\textit{Radio}\,N(0) = (3,5)+2\,(-1,0)=(1,5),$$

como ya sabíamos.

3. Considera la elipse en $\mathbb{R}^2$ dada por $x^2/4+y^2=1$.
   a) Parametriza dicha elipse.
   b) Determina la familia de rectas tangentes a dicha elipse (a través de su ecuación implícita).
   c) Calcula la envolvente de dicha familia.
   d) Calcula centro y radio de la circunferencia osculatriz a dicha envolvente en el punto $P=(2,0)$.

Solución. 3.a) La parametrización más simple: $\alpha(t)=(2\cos(t),\sin(t))$. Para el 3.b) recordamos que la recta tangente en cada punto puede ser descrita como

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \langle (x,y)-\alpha(t), N(t)\rangle = 0\},$$

por ello, solo necesitamos $N(t)$. Hacemos los cálculos, que resultan muy simples:

$$\begin{aligned} \alpha'(t)=(-2\operatorname{sen}(t),\cos(t)) \quad &\Rightarrow \quad T(t)=\tfrac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}=\tfrac{(-2\operatorname{sen}(t),\cos(t))}{\sqrt{1+3\operatorname{sen}^2(t)}} \text{ y } T'(t)=\tfrac{(-2\cos(t),-4\operatorname{sen}(t))}{\left(\sqrt{1+3\operatorname{sen}^2(t)}\right)^3}, \\ &\Rightarrow \quad N(t)=\tfrac{T'(t)}{|T'(t)|}=\tfrac{(-\cos(t),-2\operatorname{sen}(t))}{\sqrt{1+3\operatorname{sen}^2(t)}}. \end{aligned}$$

Así la familia se rectas tangentes cumplen

$$0 = \langle (x,y) - \alpha(t), N(t) \rangle = \left\langle (x - 2\cos(t), y - \sin(t)), \frac{(-\cos(t), -2\,\mathrm{sen}(t))}{\sqrt{1 + 3\,\mathrm{sen}^2(t)}} \right\rangle = \frac{2 - x\cos(t) - 2y\,\mathrm{sen}(t)}{\sqrt{1 + 3\,\mathrm{sen}^2(t)}}$$

Por lo tanto, la ecuación que define la familia de rectas tangentes es (quitando el denominador)

$$F(x,y;t) = 0, \quad \textit{siendo} \quad F(x,y;t) = x\cos(t) + 2y\,\mathrm{sen}(t) - 2.$$

Resolveremos el 3.c) ya que no requiere de cáculo alguno. Hemos de saber que la envolvente de la familia de rectas tangentes de cualquier curva es la propia curva; en este caso, la elipse de la que partimos.

No obstante, haremos las cuentas, que también se puede. Planteamos las ecuaciones de la envolvente:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x,y;t) = -x\,\mathrm{sen}(t) + 2y\cos(t) = 0, \quad y \quad F(x,y,\lambda) = x\cos(t) + 2y\,\mathrm{sen}(t) - 2 = 0,$$

que, escrito como sistema, resulta más sencillo:

$$\begin{pmatrix} -\mathrm{sen}(t) & 2\cos(t) \\ \cos(t) & 2\,\mathrm{sen}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Resolvemos calculando la inversa (que es muy fácil de calcular):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{sen}(t) & \cos(t) \\ \cos(t)/2 & \mathrm{sen}(t)/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ \mathrm{sen}(t) \end{pmatrix} = \alpha(t),$$

como tenía que ser.

Para resolver el 3.d) aprovechamos las cuentas que ya hemos hecho, pues la envolvente coincide con α. Observamos primero que $(2,0) = \alpha(0)$. Por otro lado, ya tenemos calculados:

$$\alpha'(0) = (0,1), \qquad T'(0) = (-2,0), \quad y \quad N(0) = (-1,0),$$

y entonces

$$\textit{Radio} = \frac{1}{k(0)} = \frac{|\alpha'(0)|}{|T'(0)|} = \frac{1}{2}, \quad y \quad \textit{centro} = \alpha(0) + \textit{Radio}\,N(0) = (2,0) + \frac{1}{2}(-1,0) = (3/2, 0),$$

como ya sabíamos.

4. Consideramos la superficie reglada con directriz la elipse $\left\{ \begin{array}{l} 4x^2 + y^2 = 1, \\ y - z = 0, \end{array} \right.$ y con generatrices en la dirección del vector $\mathrm{w} = (0,1,-1)$.

   a) Parametrízala y determina su ecuación implícita.

   b) Calcula sus curvaturas principales en todos los puntos.

   c) Clasifica todos los puntos de la superficie e indica si es desarrollable o no.

Solución. 4.a) En este caso es trivial parametrizar la elipse directriz como

$$\alpha(t) = \Big(\frac{\mathrm{sen}(t)}{2}, \cos(t), \cos(t)\Big),$$

y por lo tanto, parametrizar el cilindro como

$$X(u,v) = \alpha(u) + vw = \Big(\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(u), \cos(u) + v, \cos(u) - v\Big)$$

Para hallar la ecuación implícita, hay que eliminar los parámetros u y v (a ojo):

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\operatorname{sen}(u) \\ y=\cos(u)+v \\ z=\cos(u)-v \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y+z=2\cos(u) \\ x=\frac{1}{2}\operatorname{sen}(u) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \frac{1}{2}(y+z)=\cos(u) \\ 2x=\operatorname{sen}(u) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{4}(y+z)^2+4x^2=1.$$

Para el 4.b) hacemos los cálculos (aunque, como w es constante, ya sabemos que es un cilindro con una elipse por directriz, y que por lo tanto una curvatura principal es cero y la otra no, y que por ello todos los puntos son planos y la superficie es desarrollable):

$$X_u=\Big(\frac{\cos(u)}{2},-\operatorname{sen}(u),-\operatorname{sen}(u)\Big),\ y\ X_v=(0,1,-1)\ \Rightarrow\ X_t\times X_v=\Big(2\operatorname{sen}(v),\frac{\cos(v)}{2},\frac{\cos(v)}{2}\Big)$$

de donde obtenemos fácilmente la primera forma fundamental y el normal :

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\#}{8} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\qquad y\ \ N(t,v)=\frac{1}{\sqrt{\#}}\Big(4\operatorname{sen}(t),\cos(t),\cos(t)\Big),\ con\ \#=2(\cos^2(t)+8\operatorname{sen}^2(t))$$

Para la segunda forma, calculamos las segundas derivadas (aunque ya sabemos que $g=0$ por teoría),

$$X_{uu}=\Big(\frac{-\operatorname{sen}(u)}{2},-\cos(u),-\cos(u)\Big),\quad X_{vv}=(0,0,0),\quad X_{uv}=(1,0,0)$$

de donde se calculan muy fácilmente (todas las matrices resultan diagonales)

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{\#}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad y\quad \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-16}{\sqrt{\#^3}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto las curvaturas principales son $k_1=0$ y $k_2=\frac{-16}{\sqrt{\#^3}}=\frac{-8}{\sqrt{2(\cos^2(t)+8\operatorname{sen}^2(t))^3}}$.

Responder al 4.c) ahora resulta evidente. Como acabamos de ver, en todos los puntos $k_1=0$ y $k_2<0$, por lo que $K=0$ en todos los puntos, así que todos ellos son parabólicos y la superficie e s desarrollable.

5. Calcula el centro de masas del casquete esférico (macizo): $E=\{x^2+y^2+z^2\le 1, z\ge 1/2\}$, y del cascarón; $C=\{x^2+y^2+z^2=1, z\ge 1/2\}$, tomando densidades de masa igual a 1.

Solución. Para el Casquete macizo, primero notamos que, por simetría, tanto $x_{c.d.m}$ como $y_{c.d.m}$ son cero. Para el restante, indicamos los cálculos.

$$Masa(E)=M=\int_{z=1/2}^{z=1}\pi r^2dz=\int_{1/2}^{1}\pi(1-z^2)dz=\pi\left[z-\frac{z^3}{3}\right]_{1/2}^{1}=\frac{5\pi}{24}.$$

Por otro lado:

$$Mz_{c.d.m}=\int_{z=1/2}^{z=1}z\pi r^2dz=\int_{1/2}^{1}\pi(z-z^3)dz=\pi\left[\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{4}\right]_{1/2}^{1}=\frac{9\pi}{64}.$$

Y de ambas, deducimos $z_{c.d.m}=\frac{9\pi/64}{5\pi/24}=27/40$.

Para el cascarón, también por simetría, $x_{c.d.m}$ como $y_{c.d.m}$ son cero. Para el otro, indicamos los cálculos.

$$Masa(C)=M=\int dS=\iint\operatorname{sen}(\theta)d\theta d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/3}\operatorname{sen}(\theta)d\theta=2\pi[-\cos(\theta)]_0^{\pi/3}=\pi.$$

$$Mz_{c.d.m}=\int zdS=\iint\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)d\theta d\varphi=2\pi\left[\frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{2}\right]_0^{\pi/3}=\frac{3\pi}{4}.$$

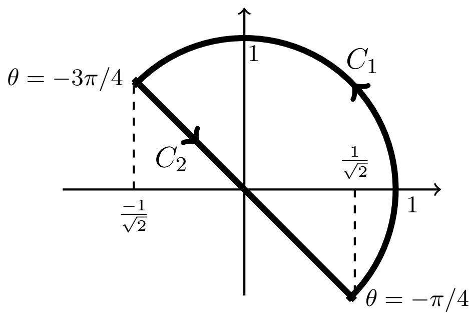
De ambas, deducimos $z_{c.d.m}=\frac{3\pi/4}{\pi}=3/4$.

5. Verifica los Teoremas de Green circulación-rotacional y flujo-divergencia para el campo:

$$\vec{F}(x,y) = (x\,y\,,y),$$

en el recinto $S = \{x^2+y^2 \le 1, x+y \ge 0\}$.

Solución.



$$C_1 = \left\{x^2+y^2 = 1, \tfrac{-\pi}{4} \le \theta = \operatorname{arc\,tg}\left(\tfrac{y}{x}\right) \le \tfrac{3\pi}{4}\right\}$$

$$C_2 = \left\{y = -x, \tfrac{-1}{\sqrt{2}} \le x \le \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

Teorema de Green circulación-rotacional:

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_{C_1} xy\,dx + y\,dy = \begin{bmatrix} x=\cos\theta, & dx = -\operatorname{sen}\theta d\theta \\ y = \operatorname{sen}\theta, & dy = \cos\theta d\theta \end{bmatrix} = \int_{\theta=-\pi/4}^{\theta=3\pi/4} -\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta \\
&= \begin{bmatrix} t = \operatorname{sen}\theta \\ dt = \cos\theta d\theta \end{bmatrix} = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} (t-t^2)dt = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} = \frac{-1}{3\sqrt{2}}, \\
\int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_{C_2} xy\,dx + y\,dy = \begin{bmatrix} y=-x \\ dy = -dx \end{bmatrix} = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} (x-x^2)dx = \frac{-1}{3\sqrt{2}}, \\
&\Rightarrow \oint_{C_1\cup C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{-1}{3\sqrt{2}} + \frac{-1}{3\sqrt{2}} = \frac{-2}{3\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Y por otro lado

$$\int_S \operatorname{rot}\vec{F}\,dx\,dy = \int_S -x\,dx\,dy \overset{\text{polares}}{=} -\int_0^1 r^2 dr \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \cos\theta\,d\theta = \frac{-2}{3\sqrt{2}}, \text{ que coincide!}$$

Teorema de Green flujo-divergencia:

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{n} &= \int_{C_1} xy\,dy - y\,dx = \begin{bmatrix} x=\cos\theta, & dx = -\operatorname{sen}\theta d\theta \\ y = \operatorname{sen}\theta, & dy = \cos\theta d\theta \end{bmatrix} = \int_{\theta=-\pi/4}^{\theta=3\pi/4} \cos^2\theta \overbrace{\operatorname{sen}\theta\,d\theta}^{-d\cos\theta} + \overbrace{\operatorname{sen}^2\theta}^{(1-\cos(2\theta))/2}\, d\theta \\
&= -\left[\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{-\pi/4}^{3\pi/4} + \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{4}\right]_{-\pi/4}^{3\pi/4} = \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2} \\
\int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{n} &= \int_{C_2} xy\,dy - y\,dx = \begin{bmatrix} y=-x \\ dy = -dx \end{bmatrix} = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} (x+x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}, \\
&\Rightarrow \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{n} = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{n} + \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{n} = \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Y por otro lado

$$\int_S \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dx\,dy = \iint (y+1)dx\,dy \overset{\text{polares}}{=} -\int_0^1 r^2 dr \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \operatorname{sen}\theta\,d\theta + \int_0^1 r\,dr \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} d\theta = \frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2}, \text{ que coincide!}$$