AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
(Guía de contenidos por semana, hasta 14 de noviembre de 2017)

Juanjo Nieto, Manuel Calixto & Claudia García

Curso 2017–18

Calendario primer cuatrimestre

Sept.			13	14	15	16	17
	18	19	20	21	22	23	24
	25	26	27	28	29	30	
Octu.							1
	2	3	4	5	6	7	8
	9	10	11	12	13	14	15
	16	17	18	19	20	21	22
	23	24	25	26	27	28	29
	30	31					
Novi.			1	2	3	4	5
	6	7	8	9	10	11	12
	13	14	15	16	17	18	19
	20	21	22	23	24	25	26
	27	28	29	30			
Dici.					1	2	3
	4	5	6	7	8	9	10
	11	12	13	14	15	16	17
	18	19	20	21	22		

-Azul, día de clase., Rojo: día festivo.

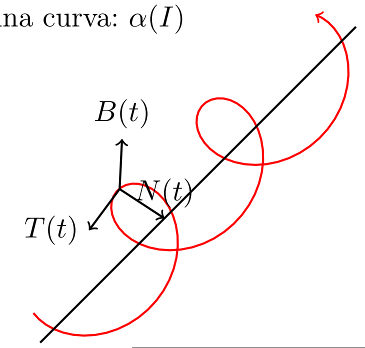
Controles y exámenes

-10 octubre: control 1: curvas $\boxed{\text{0,6 ptos}}$
-6 noviembre: (convocatoria especial)
-3 noviembre, control 2: práctica curvas $\boxed{\text{0,6 ptos}}$
-7 noviembre: control 3, superficies $\boxed{\text{0,6 ptos}}$
-10 nov, control 4, parcial $\boxed{\text{3,5 ptos}}$
-24 nov, control 5: práctica superficies $\boxed{\text{Voluntaria}}$
-5 diciembre, control 6: integración $\boxed{\text{0,6 ptos}}$
-19 diciembre, control 7: aplicaciones $\boxed{\text{0,6 ptos}}$
-22 diciembre, control 8, parcial $\boxed{\text{3,5 ptos}}$

-22 de enero: repesca evaluación continua $\boxed{\text{7 ptos}}$
-22 de enero: prueba final única (sólo para los alumnos a los que se les haya concedido) $\boxed{\text{10 ptos}}$
-12 de febrero: examen extraordinario para los alumnos que no hayan superado la asignatura $\boxed{\text{10 ptos}}$

Semana 1: (13–15 sept-17)
-Sin clases...

Semana 2: (18–22 sept-17)
-Presentación
-Curvas parametrizadas
-Velocidad, puntos singulares, curva regular
-Traza de una curva: $\alpha(I)$



-Longitud de arco, $\boxed{s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(z)| dz.}$
-Param. natural (o param. por el arco) si $|\alpha'(s)| = 1$
-Regla de derivación de productos escalar y vectorial:

$$f, g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$
$$(f \cdot g)' = f' \cdot g' + f \cdot g' \text{ y } (f \times g)' = f' \times g' + f \times g'.$$

-Elementos (locales) geométricos:

	$\alpha(s)$ ppa	$\alpha(t)$ cualquiera
Tangente: T	$\alpha'(s)$	$\frac{\alpha'(t)}{\lvert\alpha'(t)\rvert}$ ó $N \times B$
Normal: N	$\frac{\alpha''(s)}{\lvert\alpha''(s)\rvert}$	$\frac{T'(t)}{\lvert T'(t)\rvert}$ ó $B \times T$
Curvatura: k	$\lvert\alpha''(s)\rvert$	$\frac{\lvert\alpha'(t) \times \alpha''(t)\rvert}{\lvert\alpha'(t)\rvert^3}$ ó $\frac{\lvert T'(t)\rvert}{\lvert\alpha'(t)\rvert}$

-Ejercicios: circunferencias, hélices, reparametrización de curvas con velocidad constante, preguntas de exámenes...

Semana 3: (25–29 sept-17)

	$\alpha(t)$ cualquiera
Radio de curvatura: R	$\dfrac{1}{k(t)}$
Binormal: B	$\dfrac{\alpha'(t)\times\alpha''(t)}{\lvert\alpha'(t)\times\alpha''(t)\rvert}$ ó $T\times N$
Torsión: τ	$\dfrac{det[\alpha'(t),\alpha''(t),\alpha'''(t)]}{\lvert\alpha'(t)\times\alpha''(t)\rvert^2}$

-Curvas planas $\Leftrightarrow \tau = 0$
-Rectas: tangente, normal y binormal
-Planos: normal, rectificante y **osculador**:

$$det\Big((x,y,z)-\alpha(t),\ \alpha'(t),\ \alpha''(t)\Big) = 0.$$

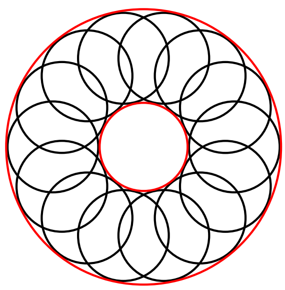
-**Triedro de Frenet**: T, N, B.
-Ecuaciones intrínsecas: $k = k(s)$ y $\tau = \tau(s)$
-Teorema fundamental (de curvas): k y τ determinan, salvo movimiento rígido, una única curva.
-**Fórmulas de Frenet** ($\alpha(s)$ p.p.a.)

$$\boxed{T' = k\,N,\ B' = -\tau\,N \text{ y } N' = -k\,T + \tau B}$$

-Circunferencias osculatrices
-**Centro y radio** de curvatura
-**Evoluta** de una curva:

$$e(t) = \alpha(t) + R(t)N(t).$$

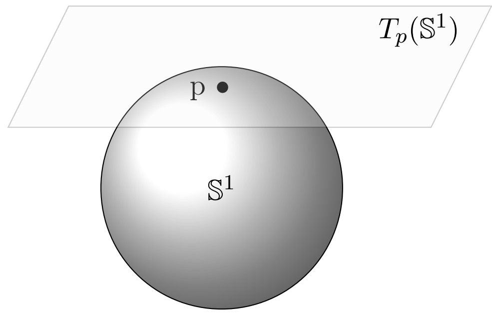
-**Envolvente** de una familia de curvas planas en implícitas: $F(x,y;\lambda) = 0$



$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y;\lambda) = 0 & \text{(tangente coincide)} \\ F(x,y;\lambda) = 0 & \text{(toca alguna curva)} \\ (F_x,F_y)(x,y;\lambda) \neq 0 & \text{(no es singular)} \end{cases}$$

(Enlace web sobre envolventes)
-Evoluta como envolvente del haz de rectas normales
-Ejercicios: Triedro, k y τ en una curva no p.p.a., plano osculador (ecuaciones de), detección de curvas planas, curvas espirales, **producto mixto** y relación con torsión, búsqueda de puntos verificando condiciones varias...

Semana 4: (2–6 oct-17)
-Idea intuitiva de superficie: **latitud y longitud**
-**Superficie regular**
-Parametrización X (sistema local de coordenadas)
-Vectores tangentes y plano tangente
-Matriz $DX(u_0,v_0)$ y base de $T_p(S)$



-**Grafos** $X(u,v) = (u, f(u,v), v)$
-Plano tangente y recta normal
-**Valor regular**, $S = F^{-1}$(valor regular)
-Relación ∇F con plano tangente y recta normal
-Ejemplos: Esfera, cilindros, hiperboloide, conos...
-**Superficies regladas**: $X(u,v) = \alpha(u) + v\mathrm{w}(u)$
-Directriz y generatrices
-Enlace: Algunas construcciones regladas
-**Superficies de revolución** (ejes OX, OY, y OZ)
-Elipsoide, hiperboloide, cilindros, paraboloide hiperbólico, conos...
-Ejercicios (curvas): Evolutas, Frenet, envolventes,...

Semana 5: (9–13 oct-17)

-**Superficies de traslación**:
$X(u,v) = \alpha(u) + \beta(v) - P_0$
-Producto escalar en coordenadas locales
-Primera forma Fundamental I_p
-Cálculo de $E := |X_u|^2$
-Cálculo de $F := X_u \cdot X_v$
-Cálculo de $G := |X_v|^2$
-**Área de una región** $R = X(U) \subset S$

$$\text{Área}\,(R) = \int_U \sqrt{EG - F^2}\; dudv$$

-$EG - F^2$ siempre es > 0
-Ejemplos: grafos, helicoide
-**Control 1: curvas**

-**NOTA**. El viernes 13 de octubre de 2017 los alumnos hacen puente, por lo que no habrá clase.

Semana 6: (16–20 oct-17)
-**Orientación** (local) de superficies: $N(p) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}$
-Superficies orientables: Aplicación de Gauss
-Superficies no orientables (banda de Moëbius)
-**Segunda forma fundamental** II_p
-Cálculo de $e := N \cdot X_{uu}$
-Cálculo de $f := N \cdot X_{uv}$
-Cálculo de $f := N \cdot X_{uv}$
-Curvatura normal en un punto y en una dirección
-Relación entre II_p, "derivada" de N y curvatura
-Teorema de Meusnier ($|\mathrm{w}| = 1$)

$$II_p(\mathrm{w}) = -\mathrm{w} \cdot DN_p(\mathrm{w}) = N(p) \cdot \alpha''(0) = k_\alpha N \cdot N_\alpha$$

-La matriz que nos interesa (matriz de DN_p respecto de la base $\{X_u, X_v\}$)

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

-**Repaso de matrices**
-Valores y vectores propios, ecuación característica
-Forma cuadrática asociada
-Traza, determinante, relación con valores propios
-**Curvaturas principales: k_1 y k_2**
-k_1 y k_2 como valores propios de A y como valores máximo y mínimo valor de curvaturas normales
-Radios de Curvatura $R_i = 1/k_i$
-Direcciones principales (vectores propios de A)
-$\boxed{\textbf{Curvatura de Gauss } K} = k_1 k_2 = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$
-Curvatura media $2H = (k_1 + k_2) = \frac{eG + Eg - 2fF}{EG - F^2}$
-Direcciones asintóticas: $\mathrm{w} = aX_u + bX_v$ tales que

$$II_p(\mathrm{w}) = (a, b) \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

-**Clasificación de los puntos** de una superficie
-Elípticos, si $K > 0$ (tipo elipsoide)
-Hiperbólicos, si $K < 0$ (tipo silla de montar)
-Parabólicos, si $K = 0$ (planos si $k_1 = k_2 = 0$)
-Umbilicales cuando $k_1 = k_2$ ($\Rightarrow$ elípticos o planos)

-Clasificación en superficies **regladas** (enlace)
-En regladas, sale $g = 0$ y así, K es siempre ≤ 0
-Parámetro de distribución $p(u) = det(\alpha', \mathrm{w}, \mathrm{w}')$
-**Desarrollable**, si $K = 0$ (ó $p = 0$) en todo punto
-**Alabeada**, si $K < 0$ (ó $p \neq 0$)) en algún punto
-Tipos de desarrollables:
-**conos** (1 punto crítico),
-**cilindros** (sin puntos críticos) y,
-**superficie tangente a una curva** (a la curva β de puntos críticos), que se parametriza como:
$X = \beta(u) + v\beta'(u)$ siendo β la arista de retroceso

-**Arista de retroceso**:

$$\boxed{\beta(u) = \alpha(u) - \frac{\alpha'(u) \cdot \mathrm{w}'(u)}{|\mathrm{w}'(u)|^2} \mathrm{w}(u)}$$

-**Línea de estricción** de una alabeada (K máxima)

$$\boxed{\beta(u) = \alpha(u) - \frac{(\alpha' \times \mathrm{w}) \cdot (\mathrm{w}' \times \mathrm{w})}{|\mathrm{w}' \times \mathrm{w}|^2} \mathrm{w}(u)}$$

Ejercicios: Toro, paraboloide elíptico, elipsoide, paraboloide, $T_p(S)$, I_p, áreas, II_p, arista de retroceso...
-Dirección asintótica ($II_p(\mathrm{w}) = 0$)

Semana 7: (23–27 oct-17)
-Integración con los Profesores Calixto y García

Semana 8: (30 oct–03 nov-17)
-Ejercicios sobre superficies
-Práctica sobre curvas
-Enlace: práctica en ZIP
-**Control 2: prácticas de curvas**

Semana 9: (06–10 nov-17)
-Ejercicios sobre superficies
-(día 7) **Control 3: superficies**
-(día 10)**Control 4, parcial: Curvas y superficies**