

Universidad de Granada
Dept. Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias

Convocatoria Septiembre
8-Septiembre-2017

MODELOS MATEMÁTICOS II
GRADO MATEMÁTICAS
Y DOBLE GRADO CON ING. INFORMÁTICA

1. Se considera

$$\mathcal{D} = \left\{ y \in C_0^1([a, b]), \int_a^b w(x)y(x)^2 dx = \frac{b-a}{2} \right\} \cap C^2([a, b])$$

y los siguientes tres funcionales:

$$\mathcal{F}[y] = \int_a^b (t(x)y'(x)^2 + r(x)y(x)^2) dx, \quad \mathcal{G}[y] = \int_a^b w(x)y(x)^2 dx, \quad \Lambda[y] = \frac{\mathcal{F}[y]}{\mathcal{G}[y]},$$

donde $a < b$, y las funciones introducidas cumplen $t \in C^1([a, b])$, $r, w \in C([a, b])$ y $t, w > 0$.

1.a) Determina la ecuación diferencial que ha de verificar cualquier extremo relativo de Λ en \mathcal{D} .

1.b) Para $t = w = 1$, $r = -1$, $a = 0$ y $b = \pi$, calcula las extremales de \mathcal{F} en \mathcal{D} y prueba que Λ alcanza su mínimo en \mathcal{D} exactamente en dos de ellas.

1.a) Es evidente que $\Lambda|_{\mathcal{D}} = \frac{2}{b-a} \mathcal{F}|_{\mathcal{D}}$, por lo que los extremos de λ en \mathcal{D} , lo serán de $\frac{2}{b-a} \mathcal{F}$ en \mathcal{D} y, como el multiplicar por una constante no afecta, de \mathcal{F} en \mathcal{D} . Calculamos pues la ecuación de Euler-Lagrange (problema con restricciones de tipo integral) asociada a $F^*(x, y, p) := t(x)p^2 + r(x)y^2 - \lambda w(x)y^2$, que no es otra que

$$\frac{d}{dt} (F_p^*) - F_y^* = (t(x)y'(x))' + (\lambda w(x) - r(x))y(x) = 0.$$

1.b) (Nótese que estamos ante la formulación variacional de un problema de Sturm-Liouville). Para tales elecciones se tiene que

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^\pi (y'(x)^2 - y(x)^2) dx \quad y \quad \mathcal{D} = \left\{ y \in C_0^1([0, \pi]), \int_0^\pi y(x)^2 dx = \frac{\pi}{2} \right\} \cap C^2([0, \pi]).$$

Las extremales de \mathcal{F} en \mathcal{D} son las soluciones de la ecuación del apartado anterior (esto es $y'' + (\lambda + 1)y = 0$ en este caso) cumpliendo las condiciones de contorno $y(0) = 0 = y(\pi)$ y la restricción integral, esto es:

$$y(x) = A \cos(\sqrt{1 + \lambda}x) + B \sin(\sqrt{1 + \lambda}x),$$

verificando $y(0) = y(\pi) = 0$, e $\int_0^\pi y(x)^2 dx = \frac{\pi}{2}$.

- De $y(0) = 0$ deducimos que $A = 0$.
- Imponiendo $y(\pi) = 0$ obtenemos los valores $\lambda_n = n^2 - 1$ y las funciones $y_n(x) = B_n \sin(nx)$.
- Por último, $\frac{\pi}{2} = \int_0^\pi y_n(x)^2 dx = B_n^2 \int_0^\pi \sin^2(nx) dx = B_n^2 \frac{\pi}{2}$ nos da el valor de $B_n = \pm 1$.

Por consiguiente, las extremales pedidas son $y_n(x) = \pm \sin(nx)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, bien usando el apartado 1.a), bien usando que $\mathcal{F}[y] \geq \mathcal{F}[\sin(x)] = 0$ y $\mathcal{G}[y] \geq 0$ en \mathcal{D} , deducimos que el funcional Λ alcanza su valor mínimo (que es 0, al igual que \mathcal{F}) en dos funciones $y_{\pm 1}(x) = \pm \sin(x)$ y en ninguna otra extremal de \mathcal{F} , ya que $\Lambda[\pm \sin(nx)] = \frac{\pi}{2}(n^2 - 1)$.

2. Para $k \in \mathbb{R}$ dado, consideramos la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ por

$$f(x, y) := \begin{cases} |x|^k \operatorname{sen}(y) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2.a) ¿Para qué valores de k es f una función localmente integrable? Escribe la definición de derivada débil de la función f , con respecto a x y con respecto a y .

2.b) Calcula las derivadas usuales de f con respecto a x y con respecto a y (definidas en todo \mathbb{R}^2 , menos posiblemente en los puntos (x, y) con $x = 0$).

-¿Para qué valores de k es localmente integrable la derivada (usual) respecto a x ?

-¿Para qué valores de k es localmente integrable la derivada (usual) respecto a y ?

Justifica tus respuestas.

2.c) Para esos valores respectivos de k , calcula las derivadas débiles de f con respecto a x e y .

2.a) La función f es localmente integrable para $k > -1$, como puede comprobarse integrando $|f|$ en $[-R, R] \times [-R, R]$ (para $R > 0$) y haciendo primero la integral en x . Decimos que f tiene derivada débil con respecto a x si existe una función $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ localmente integrable tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \partial_x \phi(x, y) dx dy = - \int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) \phi(x, y) dx dy$$

para toda función $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. La definición análoga se aplica para la derivada con respecto a y .

2.b) Las derivadas usuales, definidas para $x \neq 0$, son

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y) &= k|x|^{k-1} \operatorname{sgn}(x) \operatorname{sen}(y), \\ \partial_y f(x, y) &= |x|^k \cos(y), \end{aligned}$$

donde sgn denota la función signo. Integrando de nuevo en un cuadrado, vemos que $\partial_x f$ es localmente integrable si y sólo si $k > 0$, y $\partial_y f$ es localmente integrable si y sólo si $k > -1$.

2.c) Para la derivada con respecto a y , se comprueba directamente a partir de la definición que la derivada débil siempre existe y es igual a $|x|^k \cos(y)$, ya que para x fijo la función $y \mapsto f(x, y)$ es diferenciable y siempre podemos integrar por partes en y .

Para la derivada con respecto a x observamos que la función $|x|^k$ es absolutamente continua siempre que $k > 0$. Luego para cualquier función test ϕ con soporte en $(-R, R)^2$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \partial_x \phi(x, y) dx dy &= \int_{-R}^R \operatorname{sen}(y) \int_{-R}^R |x|^k \partial_x \phi(x, y) dx dy \\ &= - \int_{-R}^R \operatorname{sen}(y) \int_{-R}^R k|x|^{k-1} \operatorname{sgn}(x) \phi(x, y) dx dy, \end{aligned}$$

donde hemos usado el teorema de integración por partes para la integral de Lebesgue en $[-R, R]$.

3. Se considera el problema consistente en minimizar el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^b ((y'(x))^2 + 8e^x y(x) - 2y(x)^2) dx + 5(y(b))^2$$

en $\mathcal{D} = H_0^1(0, b)$.

3.a) Demuestra^a la siguiente desigualdad de Poincaré para $u \in H_0^1(0, b)$:

$$\|u\|_{L^2(0,b)} \leq b \|u'\|_{L^2(0,b)}.$$

3.b) Demuestra que, en $H_0^1(0, b)$, $\|u\| := \|u'\|_{L^2(0,b)}$ es una norma equivalente a la inducida de $H^1(0, b)$, es decir, a $\|u\|_{H^1(0,b)} := (\|u\|_{L^2(0,b)}^2 + \|u'\|_{L^2(0,b)}^2)^{1/2}$.

3.c) Con ayuda de los apartados anteriores, establece condiciones sobre b para garantizar la existencia de un único elemento $y \in \mathcal{D}$ en donde \mathcal{F} alcance el mínimo.

3.d) Calcula las extremales^b de \mathcal{F} en $\mathcal{D} \cap C^2([0, \frac{\pi}{\sqrt{2}}])$. ¿Es el resultado contradictorio con el de los apartados anteriores?

^aRecuerda que $C_0^1(0, b)$ es denso en $H_0^1(0, b)$

^bPuedes buscar soluciones particulares de la EDO obtenida del tipo $y_p(x) = Ae^x + B$

3.a) Primero lo probamos para $u \in C_0^1(0, b)$; se tiene:

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(0,b)}^2 &= \int_0^b |u(x)|^2 dx \stackrel{\text{Barrow}}{=} \int_0^b \left| \int_0^x u'(z) dz \right|^2 dx \leq \int_0^b \left(\int_0^x |u'(z)| dz \right)^2 dx \\ &\stackrel{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq} \int_0^b \left(\sqrt{x} \|u'\|_{L^2(0,x)} \right)^2 dx = \|u'\|_{L^2(0,x)}^2 \int_0^b x dx = \frac{b^2}{2} \|u'\|_{L^2(0,b)}^2 \leq b^2 \|u'\|_{L^2(0,b)}^2, \end{aligned}$$

donde ha sido empleada la desigualdad de Cauchy-Schwarz de la siguiente manera:

$$\int_0^x |u'(z)| dz = \int_0^x 1 \cdot |u'(z)| dz \leq \left(\int_0^x 1^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x |u'(z)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \|u'\|_{L^2(0,x)}.$$

Para probar la desigualdad sobre funciones $u \in H_0^1(0, b)$, usamos la densidad, esto es, dada $u \in H_0^1(0, b)$, tomamos $u_n \in C_0^1(0, b)$ tal que $\|u_n - u\|_{H^1(0,b)}^2 \rightarrow 0$. Si concretamos esta convergencia, obtenemos

$$\int_0^b (u'_n - u')^2 dx + \int_0^b (u_n - u)^2 dx \rightarrow 0,$$

y, en particular,

$$\int_0^b (u'_n)^2 dx \rightarrow \int_0^b (u')^2 dx, \quad \int_0^b u_n^2 dx \rightarrow \int_0^b u^2 dx.$$

Como ya hemos probado la desigualdad para u_n , basta tomar los dos límites anteriores en dicha desigualdad para concluir.

3.b) Claramente $\|u\| \geq (\|u'\|_{L^2(0,b)}^2)^{1/2} = \|u'\|$. Por otra parte,

$$\|u\| \leq ((1 + b^2)\|u'\|_{L^2(0,b)}^2)^{1/2} = \sqrt{1 + b^2} \|u'\|,$$

en virtud de la desigualdad del apartado 3.a).

3.c) Con la idea de aplicar Lax-Milgram, definimos

$$a(u, v) := 2 \int_0^b (u'(x)v'(x) - 2u(x)v(x)) dx \quad y \quad F(u) := -8 \int_0^b e^x u(x) dx.$$

El funcional $a(\cdot, \cdot)$ es claramente bilineal y simétrico. Su continuidad en $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ se desprende inmediatamente de la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq 2 \int_0^b (|u'(x)||v'(x)| + 2|u(x)||v(x)|) dx \leq 2(\|u'\|_{L^2(0,b)}\|v'\|_{L^2(0,b)} + 2\|u\|_{L^2(0,b)}\|v\|_{L^2(0,b)}) \\ &\leq 2(\|u\| \|v\| + 2(1+b^2)\|u\| \|v\|) = 2(3+b^2)\|u\| \|v\|. \end{aligned}$$

La coercividad se sigue de la siguiente estimación, para la que empleamos nuevamente la desigualdad del primer apartado:

$$a(u, u) = 2 \int_0^b (u'(x)^2 - 2u(x)^2) dx \geq 2 \int_0^b (u'(x)^2 - 2b^2 u(x)^2) dx = 2(1 - 2b^2)\|u\|^2,$$

de donde se deduce que solamente cuando se cumpla la condición $1 - 2b^2 > 0 \Leftrightarrow b < \frac{1}{\sqrt{2}}$, podremos garantizar la coercividad del funcional $a(\cdot, \cdot)$. Finalmente, F es lineal y continuo en \mathcal{D} , pues

$$|F(u)| \leq 8 \left(\frac{1}{2}(e^{2b} - 1) \right)^{1/2} \|u\|_{L^2(0,b)} \leq 8e^b \|u\|_{L^2(0,b)}.$$

Por consiguiente, siempre que $b < \frac{1}{\sqrt{2}}$ podrá aplicarse el teorema de Lax-Milgram y tendremos asegurada la existencia y unicidad de mínimo en \mathcal{D} del siguiente funcional: $\frac{1}{2}a(v, v) - F(v)$, que coincide con $\mathcal{F} - 5(y(b))^3$. En consecuencia, también existirá un único mínimo de \mathcal{F} en \mathcal{D} .

3.d) La ecuación de Euler-Lagrange asociada a \mathcal{F} es $8e^x - 4y - 2y'' = 0$, o equivalentemente $y'' + 2y = 4e^x$. La solución general de la ecuación homogénea es $y_h(x) = A \operatorname{sen}(\sqrt{2}x) + B \operatorname{cos}(\sqrt{2}x)$. Por otra parte, si buscamos una solución particular como la sugerida se llega a que $y_p(x) = \frac{4}{3}e^x$ resuelve la ecuación diferencial. De este modo, todas las soluciones de la ecuación no homogénea son de la forma

$$y(x) = A \operatorname{sen}(\sqrt{2}x) + B \operatorname{cos}(\sqrt{2}x) + \frac{4}{3}e^x.$$

Imponiendo finalmente las condiciones de contorno $y(0) = y(\frac{\pi}{\sqrt{2}}) = 0$ llegamos a que B ha de valer simultáneamente $-\frac{4}{3}$ y $\frac{4}{3}e^{\pi/\sqrt{2}}$, de donde se resuelve que \mathcal{F} no tiene extremales en $H_0^1(0, \pi)$. Este resultado no contradice el del apartado anterior, que garantizaba únicamente la existencia de mínimo (y, por lo tanto, de extremal) cuando $b < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (mientras que en nuestro caso tenemos $b = \pi/\sqrt{2}$).

4. Vamos a estudiar el modelo de reacción-difusión (Skellam 1951') para la dinámica de una población biológica con tasa constante de crecimiento $\alpha > 0$, con una densidad de población inicial $v(x, 0) = v_0(x)$ (en la clase de Schwartz) y realizando un movimiento difusivo con constante de difusión $D > 0$, es decir:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) + \alpha v(x, t). \quad (1)$$

- 4.a) Verifica que las unidades de α^{-1} y $\sqrt{D/\alpha}$ son tiempo y espacio respectivamente, úsalos para realizar la siguiente adimensionalización en espacio y tiempo,

$$s := \alpha t, \quad y := \sqrt{\frac{\alpha}{D}} x, \quad u(y, s) := v(x, t)$$

y prueba que existe un cierto valor $a > 0$ tal que u cumple la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial u}{\partial s}(y, s) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y, s) + a u(y, s), \quad (2)$$

- 4.b) Verifica que, para todo $s > 0$, la función $U(y, s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi s}} \exp\left\{as - \frac{y^2}{4s}\right\}$ cumple la ecuación (2) e indica todo lo que sepas sobre el límite cuando s tiende a cero de $U(y, s)$. Deduce una expresión para la solución de (2) con condición inicial $u(y, 0) = u_0(y) = v_0(\sqrt{\frac{D}{\alpha}} y)$, siendo $v_0(x) = 3$.
- 4.c) Calcula, si existen, las soluciones de tipo $u(y, s) = \phi(y - 2cs)$ de la ecuación (2) y deshaz el cambio de variables para calcular las soluciones de tipo ondas viajera v de (1) e indica su velocidad.

4.a) Para obtener las dimensiones físicas, tomamos unidades en (1), obteniendo:

$$\left[\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]\right] = \left[\left[D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]\right] = [[\alpha v]] \Rightarrow \frac{[[v]]}{\text{tiempo}} = \frac{[[D]] [[v]]}{\text{espacio}^2} = [[\alpha]] [[v]].$$

Para las unidades de α , comparamos el primer y el tercer elemento; y para las de D comparamos el primero con el segundo. Obtenemos:

$$[[\alpha]] = \frac{1}{\text{tiempo}}, \quad [[D]] = \frac{\text{espacio}^2}{\text{tiempo}}, \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{D}{\alpha}} = \sqrt{\frac{\text{espacio}^2 \text{ tiempo}}{\text{tiempo} \cdot 1}} = \text{espacio},$$

como queríamos. Hacemos el cambio sugerido y recalculamos los 3 términos de (1):

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = \alpha \frac{\partial u}{\partial s}(y, s), \quad D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) = D \left(\sqrt{\frac{\alpha}{D}}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y, s) = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y, s), \quad \alpha v(x, t) = \alpha u(y, s).$$

Dividiendo por α en los 3 términos, obtenemos directamente (2) para $a = 1$. El cambio en la condición inicial es simplemente una evaluación en $s = 0$ o equivalentemente $t = 0$.

4.b) Para ver que U cumple (2), simplemente hemos de calcular derivadas (y reescribir U):

$$\frac{\partial U}{\partial s}(y, s) = \frac{4s^2 - 2s + y^2}{4s^2} U(y, s), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(y, s) = \frac{-2s + y^2}{4s^2} U(y, s), \quad U(y, s) = \frac{4s^2}{4s^2} U(y, s).$$

Evidentemente, U tiene problemas de continuidad en $s = 0$, ya que s aparece como factor en ambos denominadores. Punto a punto, podemos calcular: para $y \neq 0$ tenemos

$$\lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{4\pi} U = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{s}} \exp\left\{-\frac{y^2}{4s}\right\} \stackrel{w=\frac{1}{s}}{=} \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{w}{e^{\frac{y^2}{4}w}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{Hopital}}{\mapsto} \frac{4}{y^2} \lim_{w \rightarrow \infty} e^{(-\frac{y^2}{4}w)} = 0,$$

mientras que $U(0, s) = 1/\sqrt{(4\pi s)}$ tiene límite infinito. Además sabemos que es positiva y que $\int_{\mathbb{R}} U(y, s) dy = e^s$, por lo que sospechamos que le pasa igual que a la solución fundamental del calor. De hecho, si observamos que $U = e^s \times (\text{solución fundamental del calor})$, y $e^0 = 1$, entonces su "límite" en cero es el mismo que la solución fundamental del calor, es decir, la Delta de Dirac (recordamos que este límite ha de ser entendido operacionalmente, o en forma de convolución).

Todo esto indica precisamente que U es la solución fundamental de la ecuación que aparece en (2), por lo que la solución del PVI viene dada por la convolución siguiente:

$$u(y, s) = U *_y u_0 = \frac{e^s}{\sqrt{4\pi s}} \int_{\mathbb{R}} \exp \left\{ -\frac{(y-z)^2}{4s} \right\} \overbrace{u_0(z)}^{=3} dz = 3e^s,$$

donde hemos usado otra vez la conocida fórmula de la distribución Normal: $\frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx = 1$.

4.c) Buscamos soluciones de la forma $u(y, s) = \phi(y - 2cs)$, donde $2c \in \mathbb{R}$ será la velocidad de la onda (sin unidades físicas). Llamamos $\xi = y - 2cs$ y, sustituyendo en (2), obtenemos

$$\phi(\xi)'' + 2c\phi(\xi)' + \phi(\xi) = 0,$$

que tiene solución para cualquier $c \in \mathbb{R}$, Concretamente sus soluciones son

$$\phi(\xi) = A\phi_1(\xi) + B\phi_2(\xi), \quad A, B \in \mathbb{R},$$

donde

$$\begin{cases} \text{si } |c| > 1 & \Rightarrow \phi_1(\xi) = e^{\lambda_1 \xi}, \phi_2(\xi) = e^{\lambda_2 \xi}, \text{ con } \lambda_1 = \sqrt{c^2 - 1} - c, \lambda_2 = -\sqrt{c^2 - 1} - c, \\ \text{si } c = \pm 1 & \Rightarrow \phi_1(\xi) = e^{-c\xi}, \phi_2(\xi) = \xi e^{-c\xi}, \\ \text{si } -1 < c < 1 & \Rightarrow \phi_1(\xi) = e^{-c\xi} \cos(\sqrt{1 - c^2} \xi), \phi_2(\xi) = e^{-c\xi} \text{sen}(\sqrt{1 - c^2} \xi). \end{cases}$$

En cualquiera de los casos, deshaciendo el cambio, obtenemos

$$v(x, t) = \phi(y - 2cs) = \phi\left(\sqrt{\frac{\alpha}{D}} x - 2c\alpha t\right) = \phi\left(\sqrt{\frac{\alpha}{D}} (x - 2c\sqrt{\alpha D} t)\right),$$

es decir

$$v(x, t) = \tilde{\phi}(x - \tilde{c}t), \quad \text{siendo el perfil } \tilde{\phi}(z) := \phi\left(\sqrt{\frac{\alpha}{D}} z\right), \quad \text{y su velocidad } \tilde{c} = 2c\sqrt{\alpha D}.$$

Por concretar uno de los casos, si $|c| > 1$, la expresión explícita de cada onda viajera sería

$$v(x, t) = A \exp \left\{ (\sqrt{c^2 - 1} - c) \left(\sqrt{\frac{\alpha}{D}} x - 2c\alpha t \right) \right\} + B \exp \left\{ (\sqrt{c^2 - 1} + c) \left(\sqrt{\frac{\alpha}{D}} x - 2c\alpha t \right) \right\}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

CALIFICACIONES

MODELOS MATEMÁTICOS II
4º CURSO
GRADUADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS
CURSO2016-17

Notas Examen septiembre

DNI	Nota	Nota por apartado (sólo suspensos)			
		ejer 1	ejer 2	ejer 3	ejer 4
**.*.*.*.151					
**.*.*.*.279	5				
**.*.*.*.283	5,1				
**.*.*.*.317	1,7	0,5	0,0	0,0	1,2
**.*.*.*.375	4	2,0	0,3	0,3	1,4
**.*.*.*.442	1,9	0,0	0,7	0,2	1,0
**.*.*.*.483	4,1	1,0	1,2	0,4	1,5
**.*.*.*.506	1,8	0,0	0,5	0,5	0,8
**.*.*.*.566					
**.*.*.*.587	5,5				
**.*.*.*.887	5				
**.*.*.*.937					

La revisión del examen será el próximo martes día 19 a las 13:00h en el despacho del profesor Nieto.

Granada, 13 de septiembre de 2014