Universidad de Granada | **Convocatoria Junio** | MODELOS MATEMÁTICOS II
Dept. Matemática Aplicada | 19–Junio–2017 | Grado Matemáticas
Facultad de Ciencias | y Doble grado con Ing. Informática

| Apellidos | | | | | Firma |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| Nombre | D.N.I o pasaporte | $3^{o}A$ | $3^{o}B$ | $4^{o}$ | |
| | | | | | |

1. En este ejercicio trataremos de resolver la ecuación del calor en un intervalo acotado y con condiciones Dirichlet en el borde del mismo. Para ello:

   1.a) Calcula la serie de senos de la función $u_0(x) = 1 - |2x - 1|$ en el intervalo $[0, 1]$.

   1.b) Determina, para $D > 0$, todas las funciones no nulas en variables separadas que resuelvan
   $$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = D\,\partial^2_{xx} u(x,t), & (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \geq 0, \end{cases} \tag{1}$$

   1.c) Usando el principio de superposición, calcula una solución de (1) con dato inicial $u(x, 0) = u_0(x)$.

2. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio y $f \in L^2(\Omega)$. Demuestra que el funcional
$$\mathcal{F}(u) := \int_\Omega \Big((\partial_x u)^2 + \partial_x u\, \partial_y u + (\partial_y u)^2 + 4u^2\Big) dx\, dy + \int_\Omega uf\, dx\, dy,$$
definido en $H^1(\Omega)$, tiene un único mínimo global.

3. Dado $L > 0$, notamos $C^1_0(0, L)$ el conjunto de funciones $y$ de clase 1 en $[0, L]$ tales que $y(0) = y(L) = 0$.

   3.a) Consideramos el problema variacional de minimizar el funcional
   $$\mathcal{F}[y] := \int_0^L (y'(x))^2\, dx \quad \text{en el conjunto} \quad \mathcal{D} = \Big\{ y \in C^1_0(0, L) : \int_0^L y^2(x)\, dx = 1 \Big\}.$$
   Encuentra el valor del mínimo $m = m(L)$ y una función $y_m(x)$ donde se alcance. ¿En cuántas funciones se alcanza?

   3.b) En función del mínimo $m$ y de la función $y_m(x)$ que resuelven el apartado anterior, encuentra la constante $C$ más pequeña tal que
   $$\int_0^L u(x)^2\, dx \leq C \int_0^L u'(x)^2\, dx, \quad \text{para toda } u \in C^1_0(0, L),$$
   y una función no nula que demuestre que la constante $C$ no puede ser menor.

4. Se considera la siguiente ecuación de difusión: $\alpha\, \partial_t u = \beta\, \partial^2_{xx} u - \gamma(u - \delta)$, para $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$, y donde $\alpha, \beta, \gamma$ y $\delta$ son constantes positivas.

   4.a) Sean $y = \frac{x}{\lambda}$, $\tau = \frac{t}{\sigma}$ y $v(y, \tau) = \frac{u(x,t)}{\delta} - 1$, donde $u(x, t)$ resuelve la ecuación anterior. Determina las expresiones que deben adoptar $\sigma$ y $\lambda$, en términos de las constantes originales, para que $v(y, \tau)$ satisfaga la ecuación:
   $$\frac{\partial v}{\partial \tau} + v = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\,. \tag{2}$$

   4.b) Resuelve la ecuación (2) sujeta a la condición inicial $v(y, 0) = 1$. Por si te resultase útil, recuerda que la transformada de Fourier de la función $f(y) = e^{-\varepsilon^2 y^2}$ es $\hat{f}(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{|\varepsilon|} e^{-\frac{\pi^2 z^2}{\varepsilon^2}}$.

   4.c) Caso de existir, encuentra todas las ondas viajeras asociadas a la ecuación (2). ¿Hay alguna limitación con respecto a la velocidad de propagación de las mismas?

**SOLUCIONES (ESBOZO)**

$\boxed{\text{1.a)}}$ La serie de senos es

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x), \quad \textit{con} \quad b_n = 2\int_0^1 u_0(x)\operatorname{sen}(n\pi x)dx,$$

Notamos que $u_0(x) = 2x$, si $x \le 1/2$, y $u_0(x) = 2-2x$, si $x \ge 1/2$, y calculamos los coeficientes:

$$b_n = 2\int_0^{1/2} 2x\operatorname{sen}(n\pi x)dx + 2\int_{1/2}^1 (2-2x)\operatorname{sen}(n\pi x)dx = \Big[-\frac{4x}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big]_0^{1/2} + \int_0^{1/2}\frac{4}{n\pi}\cos(n\pi x)dx + ...$$

$$-\Big[\frac{4-4x}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big]_{1/2}^1 - \int_{1/2}^1 \frac{4}{n\pi}\cos(n\pi x)dx = \frac{-2\cos(\frac{n\pi}{2})}{n\pi} + \frac{4\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})}{(n\pi)^2} + \frac{2\cos(\frac{n\pi}{2})}{n\pi} + \frac{4\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})}{(n\pi)^2} =$$

$$= \frac{8\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})}{(n\pi)^2} \text{ (que es 0 en los } n \text{ pares, y en los } n \text{ impares) } \overset{n=2k+1}{=} \frac{8\operatorname{sen}(\frac{(2k+1)\pi}{2})}{((2k+1)\pi)^2} = \frac{8(-1)^k}{((2k+1)\pi)^2}.$$

Quedando:

$$u_0(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\operatorname{sen}((2k+1)\pi x).$$

$\boxed{\text{1.b)}}$ Buscamos soluciones no nulas de la forma $u(x,t) = T(t)W(x)$. Al imponer que sea solución obtenemos

$$0 = u_t - Du_{xx} = T'(t)W(x) - DT(x)W''(x), \quad \Rightarrow \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = D\frac{W''(x)}{W(x)} = -\lambda = \text{constante},$$

Entonces, resulta que $T$ y $W$ han de cumplir

$$W'' + \frac{\lambda}{D}W = 0 \textit{ con } W(0) = W(1) = 0, \textit{ y } T' = \lambda T.$$

Resolviendo primero el problema de Sturm-Liouville asociado a $W$ (el mismo que sale en Ondas pero con $D = c^2$) y después la ecuación de $T$, resulta que los únicos pares posibles (no nulos) son

$$W_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi x), \quad \textit{con} \quad \lambda_n = D(n\pi)^2, \quad \textit{y} \quad T_n(t) = e^{-D(n\pi)^2 t}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$\boxed{\text{1.c)}}$ Sumando soluciones de este tipo (ppio. de superposición) encontramos una solución genérica del calor:

$$u(x,t) = \sum_{n\ge 1} A_n \operatorname{sen}(n\pi x)e^{-D(n\pi)^2 t} \text{ (cuando sea convergente)}$$

Imponiendo finalmente la condición inicial (que ya está desarrollada en serie de senos) resulta $A_n = b_n$ y deducimos la expresión final de la solución. La convergencia se basa en que $u_0$ es continua y $u_0(0) = u_0(1) = 0$.

$\boxed{2}$ Basta aplicar Lax-Milgram (verificando todas las hipótesis) a los operadores

$$\bar f(v) := \int_\Omega vf, \textit{ y } a(u,v) = \int_\Omega \Big(2\nabla u\cdot\nabla v + 8uv + \partial_x u\,\partial_y v + \partial_x v\,\partial_y u\Big) \overset{o\ bien}{=} \int_\Omega \Big(\nabla u\cdot\nabla v + 8uv + \operatorname{div}(u)\operatorname{div}(v)\Big),$$

ya que, usando: $2ab \ge -(a^2+b^2)$, obtenemos la coercividad (las otras hipótesis son casi evidentes):

$$a(u,u) \ge \int_\Omega 2|\nabla u|^2 + 2\partial_x u\,\partial_y u + 8u^2 \ge \int_\Omega |\nabla u|^2 + 8u^2 \ge \int_\Omega |\nabla u|^2 + u^2 = \|u\|_{H^1}^2.$$

$\boxed{\text{3.a)}}$ Usamos el teorema de caracterización variacional de valores y vectores propios. En este caso, con $P = 1$, $Q = 0$ y $S = 1$, sabemos que el problema de Sturm-Liouville asociado a este problema variacional es

$$y'' + \lambda y = 0,\ x \in [0, L], \qquad y(0) = y(L) = 0,$$

y que el mínimo es el menor autovalor y se alcanza exactamente en dos funciones, la primera autofunción normalizada y su opuesta. Resolvemos pues este problema de Sturm-Liouville. Como ha aparecido varias veces en clase, resumimos los pasos: no posee autovalores $\lambda \leq 0$; para $\lambda > 0$, la solución general es

$$y(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x)$$

y, al imponer $y(0) = 0 = y(L)$ obtenemos $A = 0$ y $\mathrm{sen}(L\sqrt{\lambda}) = 0$, de donde deducimos los autovalores y las autofunciones:

$$\lambda_n = \frac{(n\pi)^2}{L^2}, \qquad y_n(x) = \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad n \in \mathbb{N},$$

por lo tanto, la respuesta es:

$$m = \lambda_1 = \frac{\pi^2}{L^2}, \qquad y_{min}(x) = \pm y_1(x) = \frac{\pm\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{\sqrt{\int_0^L \left(\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\right)^2\,dz}} = \frac{\pm\sqrt{2}}{\sqrt{L}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

$\boxed{\text{3.b)}}$ Tomando cualquier $u \in C_0^1(0, L)$ no nula e $y_u = u/\|u\|_{L^2} \in \mathcal{D}$, por el apartado anterior, sabemos que:

$$m \leq \mathcal{F}(y_u) = \frac{\int_0^L (u'(x))^2\,dx}{\int_0^L (u(x))^2\,dx} \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^L (u(x))^2\,dx \leq \frac{1}{m}\int_0^L (u'(x))^2\,dx.$$

Con ello probamos que una constante válida es $C_m = 1/m = L^2/\pi^2$. Para ver que es la más pequeña, tomamos cualquier $C$ que cumpla dicha desigualdad y la sometemos a la función $y_m$ del apartado anterior,

$$1 = \int_0^L (y_m(x))^2\,dx \leq C\int_0^L (y_m'(x))^2\,dx = C\mathcal{F}(y_m) = Cm, \quad \Rightarrow \quad C \geq \frac{1}{m} = C_m$$

$\boxed{\text{4.a)}}$ Derivando, se tienen: $\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\sigma}{\delta}\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\lambda}{\delta}\frac{\partial u}{\partial x}$, y $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\lambda^2}{\delta}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Por consiguiente, usando la ecuación de $u$, obtenemos la siguiente ecuación para $v$:

$$0 = \alpha\,\partial_t u - \beta\,\partial_{xx}^2 u + \gamma(u - \delta) = \frac{\alpha\delta}{\sigma}\partial_\tau v - \frac{\beta\delta}{\lambda^2}\partial_{yy}^2 v + \gamma\delta v = \gamma\delta\Big(\frac{\alpha}{\sigma\gamma}\partial_\tau v - \frac{\beta}{\lambda^2\gamma}\partial_{yy}^2 v + v\Big),$$

Entonces, para cumplir (2), ha de verificarse $\frac{\alpha}{\sigma\gamma} = 1$, y $\frac{\beta}{\lambda^2\gamma} = 1$, lo que equivale a $\boxed{\sigma = \alpha/\gamma}$ y $\boxed{\lambda = \sqrt{\beta/\gamma}}$.

$\boxed{\text{4.b)}}$ En primer lugar, aplicamos la transformada de Fourier a ambos miembros de la ecuación (2):

$$\partial_\tau\widehat{v} + \widehat{v} = -4\pi^2 z^2\widehat{v}, \quad \Rightarrow \quad \partial_\tau\widehat{v} = -(1 + 4\pi^2 z^2)\widehat{v}\,,$$

que tiene por solución $\widehat{v}(z, \tau) = \widehat{v}(z, 0)e^{-(1+4\pi^2 z^2)\tau}$. Tomando ahora la transformada de Fourier inversa:

$$v(y, \tau) = e^{-\tau}\,\left(\widehat{v}(z, 0)\,e^{-4\pi^2 z^2\tau}\right)\check{} = e^{-\tau}\ v(y, 0) * \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}e^{-\frac{y^2}{4\tau}} = e^{-\tau}\,\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{w^2}{4\tau}}\,dw = e^{-\tau}\,.$$

$\boxed{\text{4.c)}}$ Buscamos soluciones de la forma $v(y, \tau) = U(y - c\tau)$, donde $c \in \mathbb{R}$ denota la velocidad de propagación de la solución. Se tiene:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = -cU'(y - c\tau)\,, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = U''(y - c\tau)\,,$$

luego existirán soluciones de este tipo si y solamente si se verifica

$$-cU' + U = U'' \Leftrightarrow U'' + cU' - U = 0\,.$$

La ecuación característica asociada tiene por raíces $\mu_\pm = \frac{-c\pm\sqrt{c^2+4}}{2}$, luego, sea cual sea el valor de $c$, existen perfiles de onda y son de la forma

$$U(z) = Ae^{\mu_+ z} + Be^{\mu_- z}\,, \quad \forall A, B, c \in \mathbb{R}\,.$$

CALIFICACIONES del DOBLE GRADO

Las notas en cada apartado están evaluadas sobre una puntuación de 2.5

La última columna "Acta junio" es la **nota final por curso** (la que aparecerá en el acta) obtenida por cada alumno, en la que ya han sido tenidas en cuenta todas las consideraciones del sistema de evaluación.

| | **Control final 19 junio (nota máxima: 2,5 por apartado)** | | | | **Acta junio (sobre 10)** |
|---|---|---|---|---|---|
| DNI | **Fourier+Calor** | **Lax-Milgram** | **Sturm-Liouville** | **Drift-Difusion** | |
| **.008.*** | 1,7 | 0,5 | 0,6 | 0,8 | **5,0** |
| **.011.*** | 0,6 | 0,0 | 1,3 | 0,8 | **3,8** |
| **.048:*** | 0,8 | 1,2 | 1,3 | 0 | **4,1** |
| **.050:*** | 1,2 | 0,5 | 0,7 | 1,2 | **5,0** |
| **.087.*** | 0,4 | | 0 | 2,5 | **5,0** |
| **.136.*** | 1,8 | 2,4 | 2,4 | 2,4 | **9,5 M. HONOR** |
| **.137.*** | | | | | **No presentado** |
| **.138.*** | 1,6 | 1 | 1,3 | 1,6 | **7,0** |
| **.141.*** | | | | | **No presentado** |
| **.142.*** | 2,0 | | 1,2 | 2,5 | **5,4** |
| **.143.*** | 0 | | 0 | | **0,3** |
| **.148.*** | 2,5 | 2,5 | 2,5 | 2,4 | **9,5 M. HONOR** |
| **.206.*** | 0,4 | 0 | 2,0 | 0,8 | **5,0** |
| **.224.*** | 0 | 0,2 | 0,6 | 0,8 | **2,9** |
| **.253.*** | 0,5 | 0,5 | 1,2 | 1 | **5,1** |
| **.441.*** | 2,4 | 0,2 | 1,2 | 0,8 | **5,2** |
| **.485.*** | 0,9 | 0,2 | 1,0 | 0,8 | **5,0** |
| **.598.*** | 1,7 | 0,2 | 1,0 | 0 | **3,7** |
| **.627.*** | 1 | 0 | 0,7 | 1,3 | **4,5** |
| **.655.*** | | | | | **No presentado** |
| **.669.*** | 2,0 | 0 | 1,5 | 0,4 | **2,7** |
| **.740.*** | 0,8 | 0 | 0,6 | 0,4 | **2,6** |
| **.878.*** | 2,4 | 0,4 | 1,3 | 2,5 | **8,2** |
| **.939.*** | 2,2 | 1,0 | 1,2 | 0,4 | **5,2** |
| **.945.*** | 2,5 | 0,5 | 2 | 1,6 | **7,1** |
| **.967.*** | 0,8 | | 1,2 | 0,0 | **1,4** |

La revisión del examen será el próximo jueves 29 a las 10:00 en el despacho del profesor Juanjo Nieto.