MODELOS MATEMÁTICOS II
(Guía de contenidos por sesión, hasta 31 de mayo de 2017)

Juanjo Nieto & Antonia Delgado

Curso 2017–17

CALENDARIO SEGUNDO CUATRIMESTRE

	13	14	15	16	17	18	19
	20	21	22	23	24	25	26
	27	28					
MARZO			1	2	3	4	5
	6	7	8	9	10	11	12
	13	14	15	16	17	18	19
	20	21	22	23	24	25	26
	27	28	29	30	31		
ABRIL						1	2
	3	4	5	6	7	8	9
	10	11	12	13	14	15	16
	17	18	19	20	21	22	23
	24	25	26	27	28	29	30
MAYO	1	2	3	4	5	6	7
	8	9	10	11	12	13	14
	15	16	17	18	19	20	21
	22	23	24	25	26	27	28
	29	30	31				
JUNIO				1	2	3	4

-Clases:
 Lunes de 12:00 a 13:00
 Martes de 12:00 a 13:00
 Miércoles de 11:00 a 13:00
-Azul Día de clase.
-Rojo Día festivo.
-3 de mayo: 1.er control fijado (3 ptos).
-31 de mayo: 2.º control previsto (1.5 ptos).
-19 de junio: control final
 (5 ptos+mín{2;(4.5−acumulado)} ptos).
-19 de junio: prueba final única (sólo para los alumnos que lo hayan solicitado en plazo y les haya sido concedido).
-8 de septiembre: examen extraordinario para los alumnos que no hayan superado la asignatura.

Sesión 1: [1 hora] (13-feb-17)
-Presentación y motivación

Sesión 2: [1 hora] (14-feb-17)
-Motivación: curva de longitud mínima

$$\min L[y] := \min_{y\in\mathcal{D}} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'(x)^2}dx.$$

Sesión 3: [2 horas] (15-feb-17)
-Conexión PV, PC y formulación débil de ecuaciones
-Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones
-Ecuación de Euler–Lagrange: $\boxed{F_y - \frac{d}{dx}F_p = 0}$
-Extremales de un problema de minimización
-Condiciones de contorno cuando $\mathcal{D}$ no las incluye
-Ejemplos: longitud mínima
 -Casos: extremal único, infinitos o ninguno...

Sesión 4: [1 hora] (20-feb-17)
-Ecuación de E–L cuando $F_y = 0$: $\boxed{F_p = cte}$
-Ecuación de E–L cuando $F_x = 0$: $\boxed{F - \bar{y}'F_p = cte}$

Sesión 5: [1 hora] (21-feb-17)
-Convexidad
 -Condición suficiente de extremo
 -Mínimo local es global
 -Condición (no necesaria) de convexidad

Sesión 6: [2 horas] (22-feb-17)
-Condiciones Dirichlet, Newmann y periódicas
-El modelo de la viga
 -Tipos de sujección:
 empotramiento, apoyo, libertad

Sesión 7: [1 hora] (27-feb-17)
Ejemplos:
-Origen histórico: ppio. mínima Acción (Hamilton)
-Ley de Newton: $F = ma$
-Oscilador armónico (Acción mínima)
-La catenaria (restricciones de tipo integral)
-Superficies minimales de revolución: catenoide
-La braquistocrona (cicloide y tautocrona)

Sesión 8: [2 horas] (1-mar-17)
-Formulación variacional de la viga
-Forma autoadjunta de una ecuación lineal
-FV de un PC autoadjunto y condiciones de contorno
-Condición suficiente ($Q < 0$) de existencia
-Paso de Dirichlet no homogéneas a homogéneas
-Ejercicios: resolución de PC homogéneos

Sesión 9: [1 hora] (6-mar-17)
-Ejercicios: sobre el número de sols de PC.
-Alternativa de Fredholm

Sesión 10: [1 hora] (7-mar-17)
-Demostración del Teorema 9
-Geodésicas (varias funciones + rest. algebraicas)
-Problemas variacionales con varias funciones
-Restricciones de tipo algebraico

Sesión 11: [2 horas] (8-mar-17)
-Restricciones de tipo algebraico-diferencial
-Restricciones de tipo integral (pb. isoperimétricos)
-La catenaria (restricciones de tipo integral)

Sesión 12: [1 hora] (13-mar-17)
-La catenaria: planteamiento y EDO
-Resolución (EDO Lagrange: $y' = \operatorname{senh}(t)$)

Sesión 13: [1 hora] (14-mar-17)
-Problemas de Sturm–Liouville
-Ejemplo: $y'' + \lambda y = 0$ en $[0, L]$
-Sucesión de valores y funciones propias
-Desarrollo en series de funciones propias

Sesión 14: [2 horas] (15-mar-17)
-Caracterización variacional de valores propios y funciones propias
-Ejemplos
-Funcionales de funciones de 2 (o más) variables

$$\boxed{\left(F_u - \frac{\partial}{\partial x_1}F_p - \frac{\partial}{\partial x_2}F_q\right)\Big|_{p=\frac{\partial u}{\partial x_1}, q=\frac{\partial u}{\partial x_2}} = 0}$$

Sesión 15: [1 hora] (20-mar-17)
-Formulación variacional de la Membrana
-Simplificaciones usuales:
-Borde fijo (condición contorno Dirichlet)
-Borde nulo, $u \in C_0^1(\Omega)$
-Linealización de Taylor (deformaciones pequeñas)
-Caso estacionario: $u(t, x) = u(x)$

Sesión 16: [1 hora] (21-mar-17)
-La Membrana (Ecuaciones Euler–Lagrange)
-Modelos asociados:
-Modelo de Poisson, problema de Dirichlet, modos de vibración, superficies minimales
-Ecuación de Ondas

Sesión 17: [2 horas] (22-mar-17)
-Resolviendo la ecuación de Ondas
-Solución en $[0, \infty) \times \mathbb{R}$:
-Fórmula de D'Alembert
-Dominio de dependencia
-Ideas para la solución en $[0, \infty) \times [0, L]$:
-Separación de variables (pb. de Sturm Liouville)
-Principio de superposición
-Necesidad del desarrollo en senos
-Ejercicio: Ondas no homogénea

Sesión 18: [1 hora] (27-mar-17)
-Nociones de Análisis Funcional
-Sistema ortonormal completo en un Hilbert
-Proyección ortogonal/mejor aproximación
-Desigualdad de Bessel. Identidad de Parseval

Sesión 19: [1 hora] (28-mar-17)
-Serie trigonométrica de Fourier: $y \in L^2(0, T)$

$$\boxed{y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx, \quad a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T y(x)\,dx,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(x)\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx.$$

-Problema de Sturm-Liouville asociado
-Teorema de Riesz–Fischer

Sesión 20: [2 horas] (29-mar-16)
-Convergencia puntual, uniforme, y de las derivadas
-Fenómeno de Gibbs en los ptos. de discontinuidad
-Convergencia en media (Identidad de Parseval)
-Cambio del intervalo $[0, T]$ a $[a, b]$ y $[-L, L]$
-Extensiones par e impar: serie de cosenos/senos:

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L y(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx,\ b_n = \frac{2}{L}\int_0^L y(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx.$$

-Convergencia

Sesión 21: [1 hora] (3-abr-17)
-Ejemplo: $E(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum \frac{\operatorname{sen}(2\pi n x)}{n}$ en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
-Solución de la ecuación de Ondas (uniendo todo)
-Unicidad (método de Energía)

Sesión 22: [1 hora] (4-abr-17)
-Laplaciano en polares
-La ecuación de Dirichlet en el disco
-Separación de variables
-Necesidad del desarrollo de Fourier
-La ecuación de Dirichlet en un rectángulo (Ejercicio)

Sesión 23: [2 horas] (5-abr-17)
-Fórmula de Green (integral por partes)
-Caracterización operacional de la derivada clásica
-Derivada generalizada (distribucional)
-Derivada débil (cuando "está" en L^1_{loc})
-Derivada de $|x|$ y derivada del signo(x)
-Heaviside y la Delta de Dirac

Sesión 24: [1 hora] (18-abr-17)
-Relación derivada clásica y débil
-Espacios de Sobolev: $W^{m,p}(\Omega)$ y $H^m(\Omega)$
-$H^1_0(\Omega)$: ejemplo $w(x) = |x| - 1$ en la bola de $\mathbb{R}^2$
-Integrabilidad de $1/|x|^\alpha$ dentro y fuera de bolas

Sesión 25: [2 horas] (19-abr-17)
-Nociones de Análisis Funcional:
-Teorema fundamental del cálculo integral
-Teorema de Riesz para Hilbert y L^p
-Caracterización de conjuntos densos
-Desigualdad de Poincaré
-El Teorema de Lax–Milgram

Sesión 26: [1 hora] (24-abr-17)
-Demostraciones varias
-Teorema fundamental del cálculo integral
-Desigualdad de Poincaré (en $1-D$)

Sesión 27: [1 hora] (25-abr-17)
-Demostración de Lax–Milgram
-Formulación clásica/débil/variacional/distribucional
-Resolviendo $\boxed{-\sigma\Delta u + \alpha u = f}$ en H^1_0

Sesión 28: [2 horas] (26-abr-17)
Repaso y ejercicios de la primera parte
-Derivadas débiles
-Continuidad, coercividad...
-Resolviendo $\boxed{-\Delta u = f}$ en H^1_0

Sesión 29: [1 hora] (2-may-17)
Introducción a los modelos biológicos
-Leyes de acción de masas
-Concentración de equilibrio

Sesión 30: [2 horas] (3-may-17)
-**Primer control**.

Sesión 31: [1 hora] (8-may-17)
-Modelo de Michaelis–Menten (crecimiento bacterias)
-Descripcción y ecuaciones (LAM) asociadas
-Reducción a dos ecuaciones

Sesión 32: [1 hora] (9-may-17)
-Modelo de Michaelis–Menten
-Detección de unidades físicas
-Proceso de adimensionalización

Sesión 33: [2 horas] (10-may-17)
-Modelo de Michaelis–Menten
-Positividad y acotación: $h(\tau) = u(\tau) + \varepsilon v(\tau)$
-Existencia en $[0, \infty)$
-Comportamiento asintótico de soluciones
-Nutrientes y encimas ligadas decrecen
-Saturación del producto

Sesión 34: [1 hora] (15-may-17)
-Modelos biológicos de crecimiento de poblaciones
-Malthus, exponencial
-Logístico
-Efecto Allé (fuerte y débil)

Sesión 35: [1 hora] (16-may-17)
-Movimiento difusivo en poblaciones biológicas
-Corriente y flujo sobre la frontera
-Ley de Fick *vs.* Ley de Fourier
-Ecuación del calor $\boxed{\partial_t u = D\Delta u}$

Sesión 36: [2 horas] (17-may-17)
-Conexión entre Calor y movimiento Browniano
-Hipótesis $\delta^2/(2\tau) \to D$: régimen parabólico
-Velocidad infinita de propagación: $\delta/\tau \to \infty$
-Resolviendo la ecuación de difusión
-Clase de Schwartz
-Transformada de Fourier y transformada inversa
-Función de Gauss $G(x) := e^{-\pi x^2}$.
-Propiedades (I): biyectiva, $\hat{G} = G$, relación con derivadas y homotecias

Sesión 37: [1 hora] (22-may-17, previsto)
-Convolución
-Propiedades (II): Young, regularidad, "unidad" y relación con T. Fourier.
-$(G_\varepsilon * f) \stackrel{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} f$, y $\hat{\delta}_0 = 1$

Sesión 38: [1 hora] (23-may-17)
-Solución de la ecuadión de difusión (del calor)
-Sol. fundamental $U = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4Dt}\right\}$
-Existencia y unicidad $u = U * f$
-Propiedades de la solución del calor
-Conservación de la "masa", decaimiento, disipación de energía

Sesión 39: [2 horas] (24-may-17)
-Ecuaciones de reacción–difusión
-Adimensionalización en FKPP y biestable
-Soluciones de tipo onda viajera

$$u(x,t) = \phi(x - ct).$$

-Ecuación del perfil ϕ de la onda
-Signo de la velocidad c de la onda

-Ondas viajeras en la biestable: $f(u) = u(1-u)(\beta-u)$

$$c = \sqrt{2}\Big(\frac{1}{2} - \beta\Big), \quad \phi(\xi) = \frac{1}{1 + Ke^{\frac{x}{\sqrt{2}}} + 1}, \; K > 0$$

Sesión 40: [1 hora] (29-may-17)
-Ondas viajeras en la ecuación FKPP: $f(u) = u(1-u)$
-Puntos de equilibrio, linealización
-Diagrama de fases en $(0, 0)$ y $(1, 0)$
-Triángulo invariante
-Existencia de ondas viajeras para $c \geq 2$

Sesión 41: [1 hora] (30-may-17)
-Ejercicios de repaso

Sesión 42: [2 horas] (31-may-17)
-**Segundo control**.

Ejercicios Resueltos parte I

http://www.ugr.es/∼jllopez/CVariaciones-Resueltos.pdf

Ejercicios Voluntarios

1. Forma variacional de la viga. Demuestra que la ecuación de la viga es una condición necesaria que ha de cumplir un posible extremo del funcional siguiente:

$$\mathcal{F}[u] := \int_0^L \Big(M\frac{(u''(x))^2}{2} - N\frac{(u'(x))^2}{2} - f(x)u(x)\Big)dx.$$

definido en un conjunto adecuado.

2. Buscar los modelos de la cicloide y tautocrona, y establecer las conexiones con la braquistocrona.

3. Equivalente al Teorema 10 para Newmann.

4. Justificar por qué es imposible que todas las soluciones de una EDO lineal de orden 2 resuelvan el mismo PC con condiciones de contorno separadas.

5. Teorema de Fredholm para condiciones Newmann y periódicas.

6. Calcular las 3 series de Fourier que hemos aprendido de la función

$$y(x) = \begin{cases} x & en\ [0, \pi] \\ 2\pi - x & en\ [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

en el intervalo $[0, 2\pi]$.

7. La ecuación de Dirichlet en un rectángulo (Resuelto en clase).

Ejericios parte Biología

http://www.ugr.es/∼jjmnieto/docencia.html