# Repaso de Análisis Funcional: espacios duales

Dado $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, se define su DUAL:

$$X' := \{T : X \to \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C} : \; T \; \text{ continua}\}.$$

Con la norma $\|T\|_* := \sup_{x \in X} \dfrac{|T(x)|}{\|x\|}$, tenemos $(X', \|\cdot\|_*)$ Banach.

- Las topologías asociadas a normas se llaman FUERTES
- La acción $T(x)$ la notaremos $\langle T, x\rangle$

Iterando tenemos el BIDUAL

$$X'' := (X')' = \{\mathcal{F} : X' \to \mathbb{K} \; \text{ continuas}\}.$$

y la inyección: $X \hookrightarrow X''$, $x \mapsto \mathcal{F}_x$ tal que $\langle \mathcal{F}_x, T\rangle := \langle T, x\rangle$
(que cumple $\|\mathcal{F}_x\|_{**} = \|x\|$).
Cuando esta “inclusión” es biyectiva, $X$ se dice REFLEXIVO.

# Repaso de Análisis Funcional: topologías débiles

Dado un par dual $X$ y $X'$, definimos sendas topologías duales o débiles (a través de sus sucesiones convergentes):

- En $X$ diremos que $x_n$ converge débilmente a $x$: $\boxed{x_n \rightharpoonup x}$ si:

$$\langle T, x_n \rangle \to \langle T, x \rangle \text{ para todo } T \in X'.$$

- En $X'$ diremos que $T_n$ converge débil* a $T$: $\boxed{T_n \rightharpoonup T}$ si:

$$\langle T_n, x \rangle \to \langle T, x \rangle \text{ para todo } x \in X.$$

**Teorema (Banach–Alaouglu–Bourbaki)**

En $X'$ los acotados son débil* (pre) compactos

($\Rightarrow$ toda sucesión acotada $T_n$, tiene una parcial débil* convergente a un cierto $T$)

## Repaso de Análisis Funcional: espacios $L^p$.

Una función medible sobre un conjunto medible $\Omega$ de $\mathbb{R}^N$

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C},$$

está en el espacio $\mathcal{L}^1(\Omega)$ cuando su valor absoluto (o módulo) es integrable:

$$f \in \mathcal{L}^1(\Omega) \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad \int_\Omega |f(x)|\, dx < \infty.$$

Dos funciones que difieren sólo en un conjunto de puntos de medida nula son indistinguibles para la integral de Lebesgue. Definimos sobre el conjunto $\mathcal{L}^1(\Omega)$ la relación de equivalencia:

$$f \,\mathcal{R}\, g \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad \Big| \{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\} \Big| = 0,$$

y diremos que $f$ y $g$ son iguales casi por doquier ($f = g$ c.p.d.).

## Repaso de Análisis Funcional: espacios $L^p$.

Así aparece el espacio vectorial de Banach $L^1(\Omega)$ que, en realidad, no es un conjunto de funciones, sino un conjunto de clases de funciones en el que la norma de una clase de funciones $[f]$ se calcula a través de la integral del módulo de cualquier función que esté en la clase $f \in [f]$:

$$L^1(\Omega) := \mathcal{L}^1(\Omega)/_{\mathcal{R}}, \quad \text{con norma} \quad \|[f]\|_{L^1(\Omega)} := \int_\Omega |f(x)|\, dx.$$

En la práctica no se habla de clases de funciones, sino de funciones simplemente, refiriéndose a un representante de la clase, aunque conviene tener claros los conceptos para hacer esa identificación mental sin cometer errores.

# Repaso de Análisis Funcional: espacios $L^p$.

Análogamente podemos construir los espacios $L^p$ para cada $1 \leq p < \infty$

$$f \in \mathcal{L}^p(\Omega) \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty,$$

y tras definir la relación de equivalencia de igualdad c.p.d. definimos, para cada $1 \leq p < \infty$,

$$L^p(\Omega) := \mathcal{L}^p(\Omega)\big/_{\mathcal{R}}, \quad \text{con norma} \quad \|f\|_{L^p(\Omega)} := \left( \int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

# Repaso de Análisis Funcional: espacios $L^p$.

Por último se construye el espacio de funciones esencialmente acotadas (medibles y acotadas salvo eventualmente en un conjunto de medida nula):

$$f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega) \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad \exists C > 0 \text{ tal que } \Big|\{x \in \Omega : |f(x)| > C\}\Big| = 0,$$

donde definimos el supremo esencial como

$$\sup_{x\in\Omega} \mathrm{es}(|f(x)|) := \inf\Big\{C > 0 : \Big|\{x \in \Omega : |f(x)| > C\}\Big| = 0\Big\}.$$

Si, de nuevo, identificamos funciones que difieren en un conjunto de medida nula tendremos

$$L^\infty(\Omega) := \mathcal{L}^\infty(\Omega)\Big/_{\mathcal{R}}, \quad \text{con norma } \big\|f\big\|_{L^\infty(\Omega)} := \sup_{x\in\Omega} \mathrm{es}(|f(x)|).$$

# Repaso de Análisis Funcional: Duales de $L^p$

## Idea base: Operadores $\equiv$ integral del producto

Dada $f \in L^{p'}$ entonces $\boxed{\langle f, g\rangle := \int_\Omega f(x)g(x)dx, \forall g \in L^p}$ define un operador sobre $L^p$ con $\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1}$ $(1 \le p < \infty$ y $1' := \infty)$ (la integral está bien definida por la desigualdad de Hölder)

## Teorema de representación de Riesz

Así son todos los operadores sobre $L^p$. Y además la norma de $f$ como operador sobre $L^p$ es la misma que como función de $L^{p'}$, es decir, se identifican

$$(L^p)' \equiv L^{p'}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad 1 \le p < \infty$$

# Repaso de Análisis Funcional: propiedades de $L^p$.

## Resumen de propiedades

| | $L^1(\Omega)$ | $L^p(\Omega)$ $1 < p < \infty$ | $L^\infty(\Omega)$ |
|---|---|---|---|
| completo | sí | sí | sí |
| reflexivo | no | sí | no |
| Hilbert | no | sólo si $p = 2$ | no |
| espacio dual | $L^\infty(\Omega)$ | $L^{p'}(\Omega)$ con $1 = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'}$ | - |

Versión local: para cada $1 \leq p \leq \infty$ se tiene:

$$f \in L^p_{loc}(\Omega) \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad f \in L^p(K), \text{ para todo compacto } K \subseteq \Omega,$$

que es un espacio vectorial aunque carece de norma.

# Repaso de An. Func.: Convergencia débil en $L^p$

## Clave: acotación implica convergencia débil$^*$

Usando el Teorema de Banach–Alaouglu–Bourbaki, como todos los $L^p$ son duales de alguien (¡ojo, salvo $L^1$!), cualquier sucesión acotada tendrá una parcial que converge débil$^*$:

$$f_n \subseteq L^p(\Omega), (1 < p \leq \infty) \text{ cumpliendo } \|f_n\| \leq C, \forall n$$

Entonces existe $f \in L^p(\Omega)$ y una parcial $\sigma(n)$ tal que

$$\int_\Omega f_{\sigma(n)}(x)\phi(x)dx \to \int_\Omega f(x)\phi(x)dx$$

para todo $\phi \in L^{p'}(\Omega)$ (y, en particular, $\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$).

Observemos lo bien que se lleva la topología débil con la derivada débil; integral del producto en todo caso

# Repaso de Análisis Funcional: Derivada débil

## Derivada distribucional y derivada débil

Básicamente cualquier función $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tiene derivada (vista como operador)

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \phi \right\rangle := -\int_\Omega u(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Y se dice débil si existe $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \phi \rangle = \langle g, \phi \rangle$

## ...y pensando en ecuaciones y convergencias...

Cualquier sucesión de funciones $f_n$ que cumpla una ecuación diferencial (en sentido débil) y que esté acotadas en algún $L^p$ ($p > 1$), tendrá límite $f$, y permitirán pasar al límite en los términos lineales de la formulación débil:

$$\int_\Omega f_{\sigma(n)}(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} dx \to \int_\Omega f(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} dx$$

# Repaso de Análisis Funcional: Utilidad

Dada una Ecuación Diferencial "difícil" ................. $D[x] = 0$

## Se construyen soluciones "aproximadas"

- Se "inventa" una ED "facil" y "parecida" .......... $D_n[x_n] = 0$
- Se resuelve (para eso es fácil) ya tenemos $\{x_n\}$

## Se hacen "estimaciones a priori"

- Con qué normas están acotadas las $x_n$ ($\forall\ n$)
- Con suerte ocurre alguna de estas dos cosas:
  - $\{x_n\}$ acotada en $X'$ (el dual de algún $X$)
  - $\{x_n\}$ acotada en $X$ incluido compactamente en $Y$
- Entonces $x_{\sigma(n)}$ converge (débil* o en $Y$) a $x$ (candidato)

## Se pasa al límite en la formulación débil de $D_n[x_n] = 0$

- Términos lineales (integrales de productos): OK
- Términos no lineales: ... ¡trabajo para el matemático!