ECUACIONES DIFERENCIALES EN MECÁNICA Y BIOLOGÍA
(Guía de contenidos por sesión hasta 1 de diciembre de 2016)

Juanjo Nieto

Curso 2016–17

CALENDARIO PRIMER CUATRIMESTRE

		20	21	22	23	24	25
	26	27	28	29	30		
OCTU.						1	2
	3	4	5	6	7	8	9
	10	11	12	13	14	15	16
	17	18	19	20	21	22	23
	24	25	26	27	28	29	30
	31						
NOVI.		1	2	3	4	5	6
	7	8	9	10	11	12	13
	14	15	16	17	18	19	20
	21	22	23	24	25	26	27
	28	29	30				
DICI.				1	2	3	4
	5	6	7	8	9	10	11
	12	13	14	15	16	17	18
	19	20	21				
							8
	9	10	11	12	13	14	15
	16	17	18	19	20		

-Azul Día de clase.
-Rojo Día festivo/no lectivo.
-La ASISTENCIA A CLASE es OBLIGATORIA.
-24 de enero de 2017: prueba final única (sólo para los alumnos que lo hayan solicitado en plazo y les haya sido concedido)
-7 de julio de 2017: examen extraordinario para los alumnos que no hayan superado la asignatura en febrero.

Sesión 1: (21-sep-16)
-Presentación

Sesión 2: (22-sep-16)
-Ley de Newton
  -Partículas sometidas a campo de fuerzas
  -Ecuaciones deterministas
  -Ecuación de Liouville (Vlasov)

Sesión 3: (28-sep-16)
-Otras ecuaciones cinéticas
-Ecuaciones de transporte (notación y definiciones)
  -Forma conservativa y no conservativa: tte. puro
  -Caso especial: Liouville
  -Curvas Características: $X(t; x, s)$
  -Solución del tte. Puro: $\rho(x, t) = \rho_0(X(0; x, t))$.

Sesión 4: (29-sept-16)
-Solución del transporte en forma no conservativa
-Fórmula del transporte
-Flujo característico: $F_{s\to t}(x) := X(t; x, s)$.

Sesión 5: (3-oct-16)
-Ecuación de las derivadas del flujo
-¿Cuándo el flujo preserva la medida?
-Ecuación del Jacobiano: $J' = J\,\mathrm{div}(a)$
-Flujo preserva medidas $\Leftrightarrow \mathrm{div}(a) = 0$
-Solución del transporte en forma conservativa
-Transporte no lineal: Ecuación de Hopf–Burgers

Sesión 6: (5-oct-16)
-Transporte no lineal: Choques
-Necesidad de una formulación débil
-Leyes de conservación: $\partial_t\rho + \mathrm{div}_x(j) = f$,
  -Densidad ρ, corriente j y fuente f.
  -Flujo a través de la frontera: $(-j \cdot n)$

Sesión 7: (6-oct-16)
-Fluidos: densidad ρ y velocidad u
-Ley de conservación de la masa: $\partial_t\rho + \mathrm{div}_x(\rho u) = 0$
  -Flujo de masa
  -Formatos integral y diferencial de la LCM

Sesión 7: (10-oct-16)
-Conjuntos que se mueven con el fluido
  -Segundo formato integral de la LCM
-Fluidos incompresibles: $\mathrm{div}_x(u) = 0$
-Fluidos homogéneos: $\nabla_x \rho = 0$
-Derivada material: $\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla_x$.
-Teorema del transporte I y II
-Presión
-Fluido como superposición de capas
-Fuerzas inerciales normales: $-\nabla p$

Sesión 8: (13-oct-16)
-Fluido Ideal, ecuación de Euler
-Relación entre fuerza y tensor de tensiones
-Fuerzas inerciales laminares: tensor T de tensiones
  -Postulado de Stokes + linealidad

Sesión 9: (17-oct-16)
-Viscosidad
-Deducción de $T = \lambda \mathrm{div}(u)\mathbb{I} + 2\mu S(u)$
-Ecuación de Navier–Stokes
-Fluidos viscosos o laminares *vs.* turbulentos
-Número de Reynolds: $Re := \frac{\rho_0\, U\, L}{\mu}$

Sesión 10: (19-oct-16)
-Fluidos estacionarios, ecuación de Stokes
-Fluidos isentrópicos, entalpía: w, $\nabla_x \mathrm{w} = \frac{\nabla_x p}{\rho}$
-Líneas de corriente: $\phi'(\tau) = u(\phi(\tau), t)$
-Vorticidad de un fluido $\omega = \mathrm{rot}(u)$

Sesión 11: (20-oct-16)
-Rotacional en $2-D$ y relaciones div, rot ∇...
-Interpretación física de la vorticidad

Sesión 12: (24-oct-16)
-Teorema de Bernoulli y efecto Venturi
  -Fuerza de la gravedad
  -Trinomio de Bernoulli: $\boxed{\rho|u|^2/2 + p + \rho g h}$
-¿Por qué vuelan los aviones?

Sesión 13: (26-oct-16)
-Formulación vorticidad–velocidad (2 y 3-D) de Euler
-Ideas para probar existencia y unicidad

Sesión 14: (27-oct-16)
-Repaso de análisis funcional
  -Espacios duales y topologías débiles
  -Compacidad: las bolas son débil$*$ compactas
  -Los espacios L^p y sus duales (Teorema de Riesz)
-Top. débil $\equiv$ derivada débil $\equiv$ integral del producto

$$\langle f, g\rangle := \int f(x)g(x)dx$$

Sesión 15: (31-oct-16)
(Puente de los Santos)

Sesión 16: (2-nov-16)
-Euler 2–D para homogéneos e incompresibles
-Paso 1: Invertir u en función de ω: $u = K * \omega$

$$K(x) = \frac{-1}{2\pi|x|^2}(x_2, -x_1) = \mathrm{rot}_{2D}\Big(\frac{-1}{2\pi}\ln|x|\Big).$$

Sesión 17: (3-nov-16)
-Paso 2: estimaciones sobre u:
  -u está acotada (desigualdad de Hölder)
  -Integrabilidad dentro y fuera de bolas de $\frac{1}{|x|^\alpha}$
  -Estimaciones sobre $|K(a) - K(b)|$
  -Integrales de potencias dentro y fuera de bolas

Sesión 18: (7-nov-16)
-Paso 2: (continuación)
  -Descomposición $\mathbb{R}^2 = B_d \cup (B_1 \cap B_d^c) \cup B_1^c$
  -u es log–lipschitz, estimación
  -u decae en infinito
-Paso 3: regularización y soluciones ε–aproximadas
  -Troceado temporal $\varepsilon = T/N$, $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} \partial_t \omega^{n+1} + u^n \cdot \nabla_x \omega^{n+1} = 0, \quad t \in [n\varepsilon, (n+1)\varepsilon] \\ u^n(x) = K * \omega^n(x, n\varepsilon) \\ \omega^{n+1}(x, n\varepsilon) = \omega^n(x, n\varepsilon) \end{cases}$$

  -ω_ε preserva las normas L^1 y L^∞
  -u_ε está acotada

Sesión 19: (9-nov-16)
-Paso 3: (continuación)
  -u_ε es log–lipschitz en x y en "t"
  -$\bar{u}_\varepsilon$: versión continua de u_ε

$$\bar{u}_\varepsilon(x,t) := u^n(x) + (t - t_n)\frac{u^{n+1}(x) - u^n(x)}{\varepsilon}$$

  -$|\bar{u}_\varepsilon - u_\varepsilon| \to 0$ uniformemente.

Sesión 20: (10-nov-16)
-Paso 4: Paso al límite
-$\bar{u}_\varepsilon$: converge uniformemente en compactos a cierta u
(Teorema de Ascoli–Arcelá)
-ω_ε convergen débil* a cierta ω
-Formulación débil del problema aproximado

Sesión 21: (14-nov-16)
-Paso 4: (continuación)
  -Paso al límite en los términos lineales
  -Paso al límite del término no lineal $u_\varepsilon \cdot \nabla_x \omega_\varepsilon$
  -Combinación de convergencia fuerte–débil
  -Identificar en el límite: $\omega = \mathrm{rot}(u)$ y $\mathrm{div}(u) = 0$

Sesión 22: (16-nov-16)
-Paso 5: Unicidad
-La logaritmico-lipschitzianidad

$$|u(x+y,t)-u(x,t)| \leq C|y|(1+|\ln|y||)$$

-Unicidad sobre las trayectorias $X'(t)=u(X(t),t)$
-Unicidad de la vorticidad $\omega(x,t)=\omega_0(X(0;x,t))$
-Unicidad del campo de velocidades $u=K*\omega$

Sesión 23: (17-nov-16)
(San Alberto)

Sesión 24: (26-nov-16)
-Teorema de Stokes
-Circulación, Teorema de Kelvin
-Vortes line, vortex sheet, vortex tube
-Teorema de Helmholtz
-Interpretaciones físicas (huracanes)

Sesión 25: (28-nov-16)
Repaso cuestiones abiertas

Ejercicios.

$\boxed{\text{T.1}}$ Derivada de un determinante.

$\boxed{\text{T.2}}$ Solución del transporte en forma conservativa.

$$\rho(t,x)=\rho_0(X(0;x,t))\ J(0;x,t)\ e^{\left\{-\int_0^t a_0(X(s;x,t),s)ds\right\}}$$
$$+\int_0^t f(X(s;x,t),s)\,J(s;x,t)\,e^{\left\{-\int_s^t a_0(X(\sigma;x,t),\sigma)d\sigma\right\}}ds.$$

$\boxed{\text{A.1}}$ Teorema de la divergencia de Gauss.

$\boxed{\text{T.3}}$ Explica la igualdad entre las dos expresiones de ρ, vista bien como solución ρ de (FC), bien como solución de (FNC) con $\tilde{a}_0=a_0+\mathrm{div}_x(a)$.

$\boxed{\text{A.2}}$ Suponiendo que a rea tan bueno como sea necesario, probar que:
$\boxed{\text{I.}}$ Si ρ resuelve: $\partial_t\rho+\mathrm{div}(a\rho)=0$ y $\rho_0\in L^1(\mathbb{R}^N)$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^N}\rho(x,t)dx=\int_{\mathbb{R}^N}\rho_0(x)dx \quad \forall t.$$

$\boxed{\text{II.}}$ Si ρ resuelve: $\partial_t\rho+a\cdot\nabla\rho=0$ y $\rho_0\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, entonces

$$\|\rho(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}=\|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \quad \forall t.$$

$\boxed{\text{A.3}}$ Teorema del cambio de variable.

$\boxed{\text{F1}}$ Teorema del transporte II.

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t}\rho\, f(x,t)\,dx=\int_{\Omega_t}\rho\frac{Df}{Dt}(x,t)\,dx,$$

$\boxed{\text{F2}}$ Calcula el flujo de momento de un fluido ideal.

$\boxed{\text{F3.-voluntario}}$ Deducir la expresión del tensor de tensiones T a partir de las 4 hipótesis: Postulado de Stokes, linealidad, simetría e invarianza frente a isometrías.

$\boxed{\text{F4}}$ Prueba que si la presión p es una función explícita de la densidad ρ, entonces el fluido es isentrópico, determinando la entalpía w también como función explícita de la densidad.

$\boxed{\text{F5}}$. Dadas $f,g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ y $u,u_1,u_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, prueba las siguientes relaciones

I. $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(u))=0$, y $\mathrm{rot}(\nabla f)=(0,0,0)$,

II. $\mathrm{div}(u_1\times u_2)=u_2\cdot\mathrm{rot}(u_1)-u_1\cdot\mathrm{rot}(u_2)$,

III. $\mathrm{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$,

IV. $\mathrm{rot}(u_1 \times u_2) = u_1 \mathrm{div}(u_2) - u_2 \mathrm{div}(u_1)$
$\quad - u_1 \cdot \nabla u_2 + u_2 \cdot \nabla u_1$,

V. $\mathrm{rot}(fu) = \nabla f \times u + f\,\mathrm{rot}(u)$,

VI. $\nabla(u_1 \cdot u_2) = u_1 \cdot \nabla u_2 + u_2 \cdot \nabla u_1$
$\quad u_2 \times \mathrm{rot}(u_1) + u_1 \times \mathrm{rot}(u_2)$,

VII. $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}(u)) = -\Delta(u) + \nabla(\mathrm{div}(u))$,

VIII. $\mathrm{rot}_{2D}(\mathrm{rot}_{1D}(\phi)) = -\Delta\phi$, para $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{F6}}$ Dado un vector no nulo $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{R}^3$ y la matriz antisimétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\eta_3 & \eta_2 \\ \eta_3 & 0 & -\eta_1 \\ -\eta_2 & \eta_1 & 0 \end{pmatrix}$$

prueba que e^A es la matriz de un giro de ángulo $|\eta|$ en $\mathbb{R}^3$ con respecto al vector η.

$\boxed{\text{F7}}$ Teorema de descomposición de campos.

$\boxed{\text{F8}}$ Dada $f(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$, con $x \in \mathbb{R}^N$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ y la bola de radio $d > 0$: $B_d := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq d\}$, prueba que

$$\begin{array}{ll} i) & f \in L^p(B_d) \Leftrightarrow \alpha p < N, \\ ii) & f \in L^q\Big(\mathbb{R}^N \setminus B_d\Big) \Leftrightarrow \alpha q > N, \end{array}$$

y calcula $\|\frac{1}{|x|^\alpha}\|_{L^p(B_d)}$ y $\|\frac{1}{|x|^\alpha}\|_{L^q(B_d^c)}$.

$\boxed{\text{F9}}$ Prueba que

$$\begin{array}{ll} i) & |K(a) - K(b)| = \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{|a-b|}{|a|\,|b|}, \\ ii) & |K(a) - K(b)| \leq \dfrac{1}{2\pi}\Big(\dfrac{1}{|a|} + \dfrac{1}{|b|}\Big). \end{array}$$

$\boxed{\text{F10}}$ Si $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ prueba que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{|x|>R} |f(x)|\,dx = 0.$$

$\boxed{\text{A4}}$ Teorema de Ascolí–Arcelá

$\boxed{\text{A5.-voluntario}}$ Dada una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\|f_n\|_{L^1} \leq C, \;\; y \;\; f_n \rightharpoonup f \;\, en \;\, L^q \;(q > 1) \;\; \text{débil}^*$$

prueba que el límite f es L^1 (propuesto en clase para $q = \infty$; la dificultad es la misma).

$\boxed{\text{F11}}$ Si $\omega \in L^p \cap L^q(\mathbb{R}^2)$ con $1 < p < 2 < q < \infty$, prueba que $u = K * \omega$ está en $L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Suponiendo (no hay que demostrarlo) que una tal función u verificase además la propiedad log-lipschitz

$$|u(x+y,t) - u(x,t)| \leq C|y|(1 + |\ln|y||)$$

repite la demostración completa de existencia y unicidad hecha en clase para Euler, pero para condiciones iniciales $\omega_0 \in L^p \cap L^q(\mathbb{R}^2)$ con $1 < p < 2 < q < \infty$.

$\boxed{\text{F12}}$ Teorema de Stokes

$\boxed{\text{F13–voluntario}}$. Los *vortex line* se conservan en la evolución del fluido.