Universidad de Granada	**Control final**	AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
Dept. Matemática Aplicada	2^o B	
ETS Caminos, Canales y Puertos	6–feb–2017	Grado en Ingeniería Civil

Control para toda la asignatura: 3:30h

Apellidos | Firma

Nombre | D.N.I o pasaporte

1. $\boxed{\text{2 ptos.}}$ Justifica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   1.a) En una superficie que sea un grafo de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivable, todo punto con curvatura media nula y curvatura de Gauss no nula, resulta ser hiperbólico.

   1.b) En cada punto de una curva α parametrizada por el arco se cumple: $\langle T'', T\rangle + \langle N'', N\rangle = -k^2$.

2. $\boxed{\text{3 ptos.}}$ Considera la familia de rectas planas tales que la suma de las distancias de sus puntos de corte con la parte positiva de los ejes al origen es siempre 1.

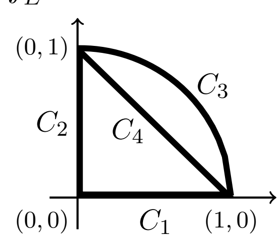
   2.a) Verifica que cada una de estas rectas cumple: $y - (1-\lambda)(1-\frac{x}{\lambda}) = K$, para cada $\lambda \in (0,1)$. (Has de determinar el valor de $K \in \mathbb{R}$).

   2.b) Calcula la envolvente de dicha familia.

   2.c) Calcula centro y radio de la circunferencia osculatriz a dicha envolvente en el punto $P = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

3. $\boxed{\text{2 ptos.}}$ Dada la figura geométrica: $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 2,\ x^2+y^2 \leq z\right\}$, con densidad de masa 1, calcula su masa y su momento de inercia respecto del eje OZ: $I_z = \displaystyle\int_E (x^2+y^2)\,dxdydz$.

4. $\boxed{\text{3 ptos.}}$ Dadas las siguientes curvas en el plano:
   C_1, segmento desde $(0,0)$ a $(1,0)$; C_2, segmento desde $(0,1)$ a $(0,0)$; C_3, el trozo de circunferencia $x^2+y^2=1$ desde $(1,0)$ hasta $(0,1)$ (primer cuadrante); y C_4, el segmento desde $(0,1)$ hasta $(1,0)$;



   y el campo en el plano $\vec{v} = v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath} = y\,\hat{\imath} - x\,\hat{\jmath}$

   4.a) Calcula la circulación ("trabajo") de $\vec{v}$: $W_C(\vec{v}) = \displaystyle\int_C \vec{v}\cdot d\vec{r}$ a lo largo de: C_1, C_2, C_3 y de la curva cerrada $C_{1,3,2} = C_1 \cup C_3 \cup C_2$.

   4.a.1) ¿Es $\vec{v}$ conservativo (o irrotacional)? Si es así, calcula su función potencial U.

   4.a.2) Comprueba que se verifica el teorema de Green circulación-rotacional para la trayectoria cerrada $C_{1,3,2}$.

   4.a.3) ¿Es igual el trabajo realizado a lo largo de C_3 que a lo largo de C_4? ¿Por qué?

   4.b) Calcula el flujo ("caudal"): $\Phi_C(\vec{v}) = \displaystyle\int_C \vec{v}\cdot d\vec{n}$ de $\vec{v}$ a través de C_3, de C_4 y de la curva cerrada $C_{3,4} = C_3 \cup C_4$.

   4.b.1) ¿Es $\vec{v}$ incompresible? Si es así, calcule su función de corriente ψ, teniendo en cuenta que $d\psi = \vec{v}\cdot d\vec{n}$.

   4.b.2) Comprueba si se verifica el teorema de Green flujo-divergencia para la curva cerrada $C_{3,4}$.

   4.b.3) Sin necesidad de calcularlo, ¿es igual el flujo a través de $C_1 \cup C_3 \cup C_2$ que a través de $C_1 \cup C_4 \cup C_2$? ¿Por qué?

Universidad de Granada | **Control final** | AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
Dept. Matemática Aplicada | 2^o B |
ETS Caminos, Canales y Puertos | 6–feb–2017 | Grado en Ingeniería Civil

Control para la primera parte: 2:30h

Apellidos

Firma

Nombre

D.N.I o pasaporte

1. [3 ptos.] Justifica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   1.a) En cada punto de una curva α parametrizada por el arco se cumple: $\langle T'', T\rangle + \langle N'', N\rangle = -k^2$.

   1.b) La evoluta de la curva $\alpha(t) = (2t^2, 2t-1, 2)$ para $t > 0$ es $e(t) = (1+6t^2, -1-8t^3, 2)$.

   1.c) En una superficie que sea $S = F^{-1}(a)$ (imagen inversa de un valor regular a mediante una función derivable $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ derivable), todo punto con curvatura media nula y curvatura de Gauss no nula, resulta ser hiperbólico.

2. [3 ptos.] Considera la familia de rectas planas tales que la suma de las distancias de sus puntos de corte con la parte positiva de los ejes el origen es siempre 1.

   2.a) Verifica que cada una de estas rectas cumple: $y - (1-\lambda)(1-\frac{x}{\lambda}) = K$, para cada $\lambda \in (0,1)$. (Has de determinar el valor de $K \in \mathbb{R}$).

   2.b) Calcula la envolvente de dicha familia.

   2.c) Calcula centro y radio de la circunferencia osculatriz a dicha envolvente en el punto $P = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

3. [4 ptos.] Dada una función $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ y positiva, considera la superficie de revolución que se obtiene al girar la curva plana
$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 2 + f(x), \ y = 0\}$$
respecto del ele OX, siendo f una función positiva y $C^\infty(\mathbb{R})$.

   3.a) Determina una parametrización de dicha superficie.

   3.b) Prueba que una de las curvaturas principales tiene signo constante en toda la superficie.

   3.c) Da un ejemplo concreto de función f tal que la superficie de revolución generada tenga tanto puntos elípticos como hiperbólicos pero que no contenga puntos planos.

Universidad de Granada	**Control final**	AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
Dept. Matemática Aplicada		
ETS Caminos, Canales y Puertos	6–feb–2017	GRADO EN INGENIERÍA CIVIL

1. Justifica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   1.a) En cada punto de una curva α parametrizada por el arco se cumple: $\langle T'', T\rangle + \langle N'', N\rangle = -k^2$.

   1.b) La evoluta de la curva $\alpha(t) = (2t^2, 2t-1, 2)$ para $t > 0$ es $e(t) = (1 + 6t^2, -1 - 8t^3, 2)$.

   1.c) En una superficie regular, todo punto con curvatura media nula y curvatura de Gauss no nula, resulta ser hiperbólico.

Solución. Para el 1.a) usamos las fórmulas de Frenet para calcular T'' y N'':

$$\begin{aligned} T' &= kN & \Rightarrow\ & T'' = k'N + kN' = \tau'N + k(kT - \tau B) = \tau'N - k^2T - k\tau B, \\ N' &= -kT - \tau B & \Rightarrow\ & N'' = -k'T - kT' - \tau'B - \tau B' = -k'T - k^2N - \tau'B - \tau^2N, \end{aligned}$$

de donde, haciendo los productos escalares indicados

$$\begin{aligned} \langle T'', T\rangle &= \tau' \overbrace{\langle N, T\rangle}^{=0} - k^2 \overbrace{\langle T, T\rangle}^{=1} - k\tau \overbrace{\langle B, T\rangle}^{=0} = -k^2, \\ \langle N'', N\rangle &= -k' \overbrace{\langle T, N\rangle}^{=0} - k^2 \overbrace{\langle N, N\rangle}^{=1} - \tau' \overbrace{\langle B, N\rangle}^{=0} - \tau^2 \overbrace{\langle N, N\rangle}^{=1} = -k^2 - \tau^2, \end{aligned}$$

por lo que 1.a) es falsa, ya que sale $\langle T'', T\rangle + \langle N'', N\rangle = -k^2 - k^2 - \tau^2$ y obviamente lo que sobra $k^2 + \tau^2$ no es cero, en general (valga como ejemplo la espiral).

Para el 1.b) sólo hemos de hacer el cálculo de la evoluta y ver si coincide:

$$\alpha'(t) = (4t, 2, 0),\ \Rightarrow\ T(t) = \frac{(2t, 1, 0)}{\sqrt{1 + 4t^2}},\ \Rightarrow\ N(t) = \frac{(1, -2t, 0)}{\sqrt{1 + 4t^2}}\ \ y\ \ k(t) = \frac{1}{(\sqrt{1 + 4t^2})^3},$$

y, por último verificamos que, efectivamente, la evoluta de α: $\alpha + N/k$, es la curva $e(t)$ descrita:

$$\alpha + \frac{N}{k} = (2t^2, 2t-1, 2) + \frac{(\sqrt{1 + 4t^2})^3}{\sqrt{1 + 4t^2}}(1, -2t, 0) = (2t^2, 2t-1, 2) + (4t^2+1, -8t^3-2t, 0) = (6t^2+1, -1-8t^3, 2).$$

El 1.c) es cierto. Llamando k_1 y k_2 a las curvaturas principales en el punto, la curvatura media nula nos dice que $H = (k_1 + k_2)/2 = 0$, que es como decir que las curvaturas principales son opuestas: $k_1 = -k_2$ y, por lo tanto, su producto, que es la curvatura de Gauss, da $K = k_1k_2 = -k_2^2 \le 0$. Pero como se dice que K no es nula, solo queda $K < 0$, es decir, el punto es hiperbólico.

2. Dada una función $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ y positiva, considera la superficie de revolución que se obtiene al girar la curva plana

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = 2 + f(x),\ y = 0\}$$

   respecto del ele OX, siendo f una función positiva y $C^\infty(\mathbb{R})$.

   2.a) Determina una parametrización de dicha superficie.

   2.b) Prueba que una de las curvaturas principales tiene signo constante en toda la superficie.

   2.c) Da un ejemplo concreto de función f tal que la superficie de revolución generada tenga tanto puntos elípticos como hiperbólicos pero que no contenga puntos planos.

Solución. 2.a) La parametrización más simple es: $\boxed{X(u, \theta) = \Big(u, (2 + f(u))\cos(\theta), (2 + f(u))\,\mathrm{sen}(\theta)\Big)}$.

Para responder a 2.b) calculamos primero la base del plano tangente:

$$X_u = \Big(1, f'(u)\cos(\theta), f'(u)\,\mathrm{sen}(\theta)\Big), \quad X_\theta = \Big(0, -(2+f(u))\,\mathrm{sen}(\theta), (2+f(u))\cos(\theta)\Big).$$

de donde obtenemos rápidamente la matriz de la primera forma fundamental y el normal:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+f'(u)^2 & 0 \\ 0 & (1+f(u))^2 \end{pmatrix}, \qquad y \;\; N(u,\theta) = \frac{\Big(f'(u), -\cos(\theta), -\mathrm{sen}(\theta)\Big)}{\sqrt{1+f'(u)^2}}.$$

Para la segunda forma, calculamos las segundas derivadas

$$X_{uu} = \Big(0, f''(u)\cos(\theta), f''(u)\,\mathrm{sen}(\theta)\Big), \quad X_{\theta\theta} = -\Big(0, (2+f(u))\cos(\theta), (2+f(u))\,\mathrm{sen}(\theta)\Big),$$

$$y \qquad X_{u\theta} = X_{\theta u} = \Big(0, -f'(u)\,\mathrm{sen}(\theta), f'(u)\cos(\theta), 0\Big),$$

de donde

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+f'(u)^2}} \begin{pmatrix} -f''(u) & 0 \\ 0 & (2+f(u)) \end{pmatrix},$$

lo que nos permite fácilmente (puesto que ambas matrices **son diagonales**) obtener la matriz de $-DN$ y las curvaturas principales sin apenas hacer operaciones:

$$matriz(-DN) = -\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{e}{E} & 0 \\ 0 & \frac{g}{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f''(u)}{\left(1+f'(u)^2\right)^{3/2}} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{(2+f(u))\sqrt{1+f'(u)^2}} \end{pmatrix}$$

siendo k_1 y k_2 los elementos (cambiados de signo) que aparecen en la diagonal:

$$k_1 = \frac{-f''(u)}{(1+f'(u)^2)^{3/2}}, \qquad k_2 = \frac{1}{(2+f(u))\sqrt{1+f'(u)^2}}.$$

Con esto respondemos el apartado 2.b), ya que k_2 es claramente una función que no cambia de signo (es siempre positiva por serlo $(2+f(z))$ y $\sqrt{1+f'(z)^2}$).

El apartado 2.c) es de libre elección, pero mirando la expresión de k_1, es obvio que cualquier función tal que $f''(x)$ cambie de signo valdrá, puesto que producirá puntos elípticos (cuando $f'' < 0$), e hiperbólicos (cuando $f'' > 0$) y nunca habrá planos, puesto que ya hemos visto que k_2 no se anula nunca. Por lo tanto tomamos por ejemplo $f(x) = 1 + \mathrm{sen}(x)$, que cumple todo lo necesario, es $f \geq 0$ y f'' cambia de signo.

3. Considera la familia de rectas planas tales que la suma de las distancias de sus puntos de corte con la parte positiva de los ejes al origen es siempre 1.

   3.a) Verifica que cada una de estas rectas cumple: $y - (1-\lambda)(1-\frac{x}{\lambda}) = K$, para cada $\lambda \in (0,1)$. (Has de determinar el valor de $K \in \mathbb{R}$).

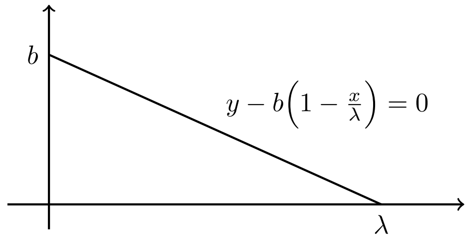
   3.b) Calcula la envolvente de dicha familia.

   3.c) Calcula centro y radio de la circunferencia osculatriz a dicha envolvente en el punto $P = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

Solución. 3.a) Si elegimos como parámetro $\lambda \in (0,1)$ el punto de corte de cada recta con el eje OX, y llamamos b al punto de corte con el eje OY (ver dibujo), entonces cada recta es de la forma $y = b - \frac{b}{\lambda}x$.

Dado que suma de las distancias entre el $(0,0)$ y los puntos de corte con los ejes: $(\lambda, 0)$ y $(0, b)$, es constantemente 1, esto permite despejar b en función de λ

$$\lambda + b = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 1 - \lambda$$



Por lo tanto, la ecuación implícita del haz de rectas es

$$0 = F(x, y, \lambda) = y - (1-\lambda)\Big(1 - \frac{x}{\lambda}\Big),$$

y queda resuelto el apartado 3.a) con $K = 0$. Para resolver 3.b) planteamos las ecuaciones de la envolvente:

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 1 - \frac{x}{\lambda^2} = 0, \qquad y \qquad F(x, y, \lambda) = 0,$$

de donde obtenemos la envolvente (en este caso no hay puntos singulares ya que $\frac{\partial F}{\partial y} = 1$):

$$x = x(\lambda) = \lambda^2, \quad y = y(\lambda) = (1-\lambda)^2, \quad \lambda \in [0, 1].$$

3.c) Es fácil ver que el punto $P = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ de la envolvente se obtiene para $\lambda_0 = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, lo que nos piden es obtener la circunferencia osculatriz a la curva obtenida:

$$\alpha(\lambda) = \Big(\lambda^2, (1-\lambda)^2\Big), \text{ en el punto } P = \alpha(\lambda_0).$$

Para ello, necesitamos el normal $N(\lambda_0)$ y el radio de curvatura $R(\lambda_0)$. Pasamos a hacer los cálculos:

$$\begin{aligned}
\alpha'(\lambda) = \Big(2\lambda, 2(\lambda - 1)\Big) \quad &\Rightarrow \quad T(\lambda) = \tfrac{\alpha'(\lambda)}{|\alpha'(\lambda)|} = \tfrac{(\lambda, \lambda-1)}{\sqrt{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}} \quad \text{y} \quad T'(\lambda) = \tfrac{(1-\lambda, \lambda)}{(2\lambda^2-2\lambda+1)^{3/2}}\ , \\
&\Rightarrow \qquad \alpha'(\lambda_0) = (1, -1) \quad \text{y} \quad T'(\lambda_0) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}), \\
&\Rightarrow \quad N(\lambda_0) = \tfrac{T'(\lambda)}{|T'(\lambda)|} = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) \quad \text{y} \quad k(\lambda_0) = \tfrac{|T'(\lambda_0)|}{|\alpha'(\lambda_0)|} = \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la circunferencia osculatriz tiene radio $R_0 = \frac{1}{k(\lambda_0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y centro $= P + R_0\, N(\lambda_0) = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$.