Universidad de Granada
Dept. Matemática Aplicada
ETS Caminos, Canales y Puertos

Convoc. Extraordinaria
2^o B
20-Julio-2017

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
GRADO EN INGENIERÍA CIVIL

1. Justifica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   1.a) Dada una curva $\alpha(t)$ regular cualquiera, la longitud del arco de curva sobre cualquier intervalo de la forma $[0, L]$ será siempre mayor o igual a L, dándose la igualdad solo en el caso en que esté parametrizada por el arco.

   1.b) Dada una curva α parametrizada por el arco, se cumple: $\langle T'', B\rangle + \langle N'', N\rangle + \langle B'', T\rangle \leq 0$ en todo punto.

1.a) Falso. Basta considerar curvas sencillas para verlo, como por ejemplo rectas en el plano: $\alpha(t) = (a\,t, 1)$, con $a > 0$, en el intervalo $[0, L]$ cuya longitud es

$$long = \int_0^L |\alpha'(t)|dt = \int_0^L |(a,0)|\,dt = \int_0^L \sqrt{a^2+0^2}\,dt = a\int_0^L dt = a\,L.$$

Por lo tanto, para $a < 1$, obtenemos longitudes menores que L, lo que contradice el enunciado. Además, es cierto que se da la igualdad cuando está parametrizada por el arco, pero no “sólo” en ese caso.

1.b) Verdadero. Usamos las fórmulas de Frenet para calcular T'', N'' y B'':

$$\begin{array}{lcl} T' = kN & \Rightarrow & T'' = k'N + kN' = k'N - k(kT+\tau B) = -k^2T + k'N - k\tau B, \\ N' = -kT - \tau B & \Rightarrow & N'' = -k'T - kT' - \tau' B - \tau B' = -k'T - (k^2+\tau^2)N - \tau' B, \\ B' = \tau N & \Rightarrow & B'' = \tau' N + \tau N' = \tau' N - \tau(kT+\tau B) = -k\tau\, T + \tau' N - \tau^2 B. \end{array}$$

Usando $\langle T, T\rangle = \langle N, N\rangle = \langle B, B\rangle = 1$ y $\langle T, N\rangle = \langle N, B\rangle = \langle B, T\rangle = 0$ y haciendo la operación pedida:

$$\langle T'', B\rangle + \langle B'', T\rangle + \langle N'', N\rangle = -k\tau - k\tau - (k^2+\tau^2) = -(k^2+\tau^2+2k\tau) = -(k+\tau)^2$$

que obviamente es menor o igual a cero (es algo al cuadrado con un signo menos delante).

2. Considera la curva $\alpha(t) = (\mathrm{sen}(t), 2t, \cos(t))$.

   2.a) Calcula el triedro de Frenet en cada punto y determina una parametrización de la superficie tubular generada al construir un tubo de radio $r = 1$ en torno a dicha curva.

   2.b) Clasifica el punto $P = (0, \pi, 0)$ de dicha superficie y calcula los vectores de $\mathbb{R}^3$ que determinan las direcciones principales en él.

   2.c) Calcula, si las hay, las direcciones asintóticas en P, y describe la indicatriz de Dupin

2.a) Calculamos triedro de Frenet:

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\cos(t), 2, -\mathrm{sen}(t)\Big), \quad N(t) = (-\mathrm{sen}(t), 0, -\cos(t)), \quad y \quad B(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(-2\cos(t), 1, 2\,\mathrm{sen}(t)\Big).$$

Por lo tanto la parametrización de la superficie tubular es (con $r = 1$):

$$\begin{aligned} X(t,\theta) &= \alpha(t) + r\cos(\theta)N(t) + r\,\mathrm{sen}(\theta)B(t) \\ &= \Big(\mathrm{sen}(t) - \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(t) - \frac{2\cos(t)\,\mathrm{sen}(\theta)}{\sqrt{5}},\, 2t + \frac{\mathrm{sen}(\theta)}{\sqrt{5}},\, \cos(t) - \cos(t)\cos(\theta) + \frac{2\,\mathrm{sen}(t)\,\mathrm{sen}(\theta)}{\sqrt{5}}\Big). \end{aligned}$$

2.b) Notamos que $P = X(\pi/2, 0) = (0, \pi, 0)$, por lo que todo el ejercicio se hace en las coordenadas $(\pi/2, 0)$. Primero, derivando una vez, obtenemos los vectores base del plano tangente:

$$X_t(\pi/2, 0) = (0, 2, 0), \quad X_\theta(\pi/2, 0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, 2).$$

Por lo tanto, la matriz de la primera forma y el normal son, respectivamente:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 1 \end{pmatrix}, \qquad y \;\; N(\pi,0) = \frac{X_t \times X_\theta}{|X_t \times X_\theta|} = (1,0,0).$$

Nótese que, como las dos últimas componentes de N son 0, los cálculos de e, f y g son más simples, pues sólo necesitamos las primeras componentes de X_{tt}, $X_{\theta\theta}$ y $X_{t\theta}$. Obtendremos

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{y, de camino:} \quad \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{16/5}\begin{pmatrix} 1 & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & 4 \end{pmatrix}$$

Como $K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = \frac{-4/5}{16/5} = \frac{-1}{4}$, obtenemos que el punto P es hiperbólico. No obstante, calculamos la matriz de $-DN$ para responder al resto de preguntas:

$$matriz(-DN) = -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{5}}{2} & -1 \end{pmatrix},$$

Ahora se obtienen fácilmente las curvaturas principales $\{k_1,k_2\} = \{1/4,-1\}$ y sus direcciones principales (en coordenadas respecto de X_t y X_θ) en dicho punto:

$$v_1 = (0,-\sqrt{5}), \quad y \quad v_2 = (\sqrt{5},-2)$$

y, por lo tanto: $\qquad v_1 = 0X_t - \sqrt{5}X_\theta = -(0,1,2), \quad y \quad v_2 = \sqrt{5}X_t - 2X_\theta = (0, 2\sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-4}{\sqrt{5}}).$

2.c) A partir de los datos obtenidos, y observando que, en coordenadas,

$$v = aX_t + bX_\theta, \quad II_p(v) = (a,b)\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = b(b + 4a/\sqrt{5})$$

simplemente la indicatriz de Dupin viene descrita por

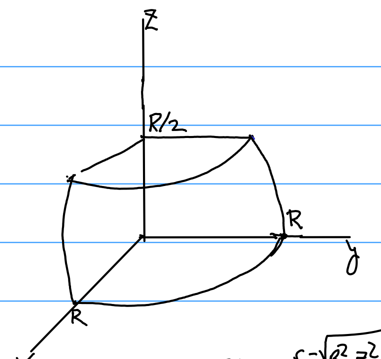
$$v = aX_t + bX_\theta \text{ tal que } b^2 + 4ab/\sqrt{5} = 1 \;\; o \;\; b^2 + 4ab/\sqrt{5} = -1.$$

Por otro lado, resolviendo $II_p(v) = 0$ (obtenemos $b = 0$ ó $b = -4a/\sqrt{5}$), obtenemos las direcciones asintóticas (en coordenadas):

$$w_1 = (1,0), \quad y \quad w_2 = (\sqrt{5},-4).$$

3. Dada la figura $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le R^2,\; x,y,z \ge 0,\; z \le \frac{R}{2}\right\}$, con densidad de masa 1, calcula su masa y su momento de inercia respecto del eje OZ: $I_z = \int_E (x^2+y^2)\, dxdydz$.

3)



$$\overbrace{x^2+y^2}^{r^2} + z^2 = R \Rightarrow r^2 + z^2 = R^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - z^2$$

$$\underset{\text{cilíndricas}}{\text{Volumen} =} \int_{z=0}^{z=R/2} dz \int_{r=0}^{\sqrt{R^2-z^2}} r\,dr \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}\int_{z=0}^{z=R/2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r^2=0}^{r^2=R^2-z^2} dz =$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^{R/2}(R^2-z^2)\,dz = \frac{\pi}{4}\left[R^2z - \frac{z^3}{3}\right]_0^{R/2} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{R^3}{2} - \frac{R^3}{24}\right) = \frac{11\pi R^3}{96}$$

$$I_z = \int \underbrace{(x^2+y^2)}_{r^2} dV = \int_{z=0}^{z=R/2} dz \int_{r=0}^{r=\sqrt{R^2-z^2}} r^3\,dr \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}\int_{z=0}^{z=R/2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{R^2-z^2}} dz = \frac{\pi}{8}\int_{z=0}^{z=R/2}(R^2-z^2)^2\,dz = \frac{203\pi R^5}{3840}$$

4. Dadas las siguientes curvas en el plano: C_1, segmento desde $(-1,0)$ a $(1,0)$; C_2, el trozo de circunferencia $x^2+y^2=1$ desde $(1,0)$ hasta $(0,1)$ (primer cuadrante); C_3, el trozo de parábola $y=-x^2+1$ desde $(0,1)$ hasta $(-1,0)$; y el campo en el plano $\vec{v}=v_x\,\hat{\imath}+v_y\,\hat{\jmath}=x\,\hat{\imath}+2y\,\hat{\jmath}$

   4.a) Calcula la circulación ("trabajo") de $\vec{v}$ a lo largo de: C_1, C_2, C_3 y de la curva cerrada $C_{1,2,3}=C_1\cup C_2\cup C_3$.

      4.a.1) ¿Es $\vec{v}$ conservativo (o irrotacional)? Si es así, calcula su función potencial U.

      4.a.2) Verifica el teorema de Green circulación-rotacional para la trayectoria cerrada $C_{1,2,3}$.

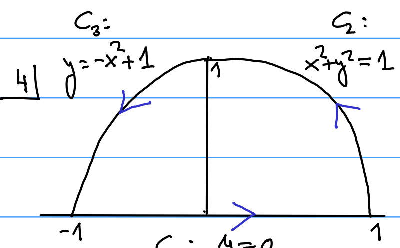
      4.a.3) ¿Es igual el trabajo realizado a lo largo de $C_2\cup C_3$ que a lo largo de C_1? ¿Por qué?

   4.b) Calcula el flujo ("caudal") de $\vec{v}$ a través de: C_1, C_2, C_3 y de la $C_{1,2,3}=C_1\cup C_2\cup C_3$.

      4.b.1) ¿Es $\vec{v}$ incompresible? Si es así, calcule su función de corriente ψ, teniendo en cuenta que $d\psi=\vec{v}\cdot d\vec{n}$.

      4.b.2) Comprueba si se verifica el teorema de Green flujo-divergencia para la curva cerrada $C_{1,2,3}$.

4)



$$W_{C_1}(\vec{v})=\int_{C_1} x\,dx+2y\,dy=\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}=\frac{1^2}{2}-\frac{(-1)^2}{2}=0$$

$$W_{C_2}(\vec{v})=\int_{C_2} x\,dx+2y\,dy=\left|\begin{matrix}x=\cos\theta\\ y=\operatorname{sen}\theta\\ dx=-\operatorname{sen}\theta\,d\theta\\ dy=\cos\theta\,d\theta\end{matrix}\right|=\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}-\cos\theta\operatorname{sen}\theta\,d\theta+2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$\left|\begin{matrix}\operatorname{sen}\theta=t\\ \cos\theta\,d\theta=dt\end{matrix}\right|=\int_{t=0}^{t=1} t\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1=1/2$$

$$W_{C_3}(\vec{v})=\int_{C_3} x\,dx+2y\,dy=\left|\begin{matrix}y=-x^2+1\\ dy=-2x\,dx\end{matrix}\right|=\int_{x=0}^{x=-1} x\,dx-2(-x^2+1)2x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{4x^4}{4}-\frac{4x^2}{2}\right]_0^{-1}=\frac{1}{2}+1-2=-\frac{1}{2}$$

$$W_{C_1\cup C_2\cup C_3}(\vec{v})=W_{C_1}(\vec{v})+W_{C_2}(\vec{v})+W_{C_3}(\vec{v})=0+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

4.a.1)

$$\operatorname{rot}(\vec{v})=\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=0\Rightarrow\vec{v}\text{ es conservativo}\Rightarrow\vec{v}=\vec{\nabla}U=\left(\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

$$\left.\begin{matrix}\frac{\partial U}{\partial x}=v_x=x\ \to\ U=\frac{x^2}{2}+f(y)\\ \Rightarrow\\ \frac{\partial U}{\partial y}=v_y=2y\ \to\ f'(y)=2y\Rightarrow f(y)=y^2\end{matrix}\right\}\Rightarrow U(x,y)=\frac{x^2}{2}+y^2+C$$

4.a.2)

$$W_{C_1\cup C_2\cup C_3}(\vec{v})=\underbrace{\int_{C_1\cup C_2\cup C_3}\vec{v}\cdot d\vec{r}}_{0}=\int\underbrace{\operatorname{rot}(\vec{v})}_{0}\,dx\,dy\Rightarrow 0=0$$ Se cumple

4.a.3) Como $\vec{v}$ es conservativo, $W_{C_2\cup C_3}(\vec{v})=W_{C_1}(\vec{v})$ ya que el trabajo no depende de la trayectoria, sino sólo del punto inicial y final $W_C(\vec{v})=U(P_{final})-U(P_{inicial})$

4.b) $\displaystyle\oint_{C_1}(\vec{v}) = \int_{C_1} V_x\,dy - V_y\,dx = \int_{C_1} x\,dy - 2y\,dx \overset{y=0}{=} 0$

$$\oint_{C_2}(\vec{v}) = \int_{C_2} x\,dy - 2y\,dx = \left| \begin{array}{l} x=\cos\theta \\ y=\operatorname{sen}\theta \\ dx=-\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\ dy=\cos\theta\,d\theta \end{array}\right| = \int \underbrace{\cos^2\theta}_{1-\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}(1+\operatorname{sen}^2\theta)\,d\theta = \frac{3\pi}{4}$$

$\operatorname{Sen}^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$

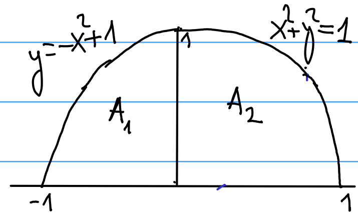
$$\oint_{C_3}(\vec{v}) = \int_{C_3} x\,dy - 2y\,dx = \left| \begin{array}{l} y=-x^2+1 \\ dy=-2x\,dx \end{array}\right| = \int_{x=0}^{x=-1} -2x^2\,dx - 2(-x^2+1)\,dx = \int_0^{-1} -2\,dx = [-2x]_0^{-1} = 2$$

$$\oint_{C_1\cup C_2\cup C_3}(\vec{v}) = \oint_{C_1}(\vec{v}) + \oint_{C_2}(\vec{v}) + \oint_{C_3}(\vec{v}) = 0+2+\frac{3\pi}{4} = 2+\frac{3\pi}{4} \neq 0 \quad (\text{no incompresible})$$

4.b.1) En efecto: $\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 1+2 = 3 \neq 0$

No existe función de Corriente.

4.b.2) $\displaystyle\oint_{C_1\cup C_2\cup C_3}(\vec{v}) = \int_{C_1\cup C_2\cup C_3} \vec{v}\cdot d\vec{n} \overset{?}{=} \int_A \operatorname{div}(\vec{v})\,dx\,dy = \int_A 3\,dx\,dy = 3\int_A dx\,dy$



$$\int_A dx\,dy = \int_{A_1} dx\,dy + \underbrace{\int_{A_2} dx\,dy}_{\pi 1^2/4} = A_1 + A_2$$

$\pi 1^2/4 \rightarrow$ El área del círculo de radio 1 dividida entre 4

$$A_1 = \int_{A_1} dx\,dy = \int_{x=-1}^{x=0} dx \int_{y=0}^{y=-x^2+1} dy = \int_{-1}^{0}(-x^2+1)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{0} = 0-\left(+\frac{1}{3}-1\right) = \frac{2}{3}$$

$$\int_A \operatorname{div}(\vec{v})\,dx\,dy = 3(A_1+A_2) = 3\left(\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = 2+\frac{3\pi}{4}$$

que coincide exactamente con $\oint_{C_1\cup C_2\cup C_3}(\vec{v})$ calculada anteriormente. Es decir, se cumple el teorema de Green flujo-divergencia.

CURSO 2016-17
GRADUADO/A EN INGENIERÍA CIVIL plan 2010
2371123 - AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
GRUPO 2^o B
EXAMEN EXTRAORDINARIO

CALIFICACIONES

DNI (oculto)	NOTA
*****04R	2,9
*****110	2,1
*****245	3,5
*****332	1,7
*****372	5,0
*****508	0,7
*****567	2,4
*****575	3,4
*****681	0,5
*****751	5,0
*****819	1,3
*****839	5,0
*****924	5,0
*****966	6,4

La revisión de exámenes será el próximo lunes 24 a las 11:00h en el despacho del profesor Nieto.