Universidad de Granada
Dept. Matemática Aplicada
ETS Caminos, Canales y Puertos

Primer control

2–Dic–2016

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

GRADO EN INGENIERÍA CIVIL

1. Justifica razonadamenbte si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   1.a) En una superficie regular S, todo punto umbilical es elíptico.

   1.b) En cada punto de una curva α parametrizada por el arco se cumple: $B'' = -k\tau\, T - \tau^2 B$.

   1.c) La evoluta de la curva plana $\alpha(t) = (2t, 2t^2, 1)$ pata $t > 0$ es $e(t) = (-8t^3, 1 + 6t^2, 1)$.

Solución. El 1.a) es obviamente cierto, ya que en un punto umbilical, las dos curvaturas principales son iguales y, por lo tanto, tienen el mismo signo.

Para el 1.b) usamos las fórmulas de Frenet para calcular B'':

$$B' = \tau N \;\Rightarrow\; B'' = \tau' N + \tau N' = \tau' N + \tau(kT + \tau B) = \tau' N - k\tau\, T - \tau^2 B,$$

por lo que la afirmación es falsa, en general, ya que sólo se cumple cuando la torsión es constante, es decir, en curvas planas.

Para el 1.c) sólo hemos de hacer el cálculo de la evoluta y ver si coincide:

$$\alpha'(t) = (2, 4t, 0), \;\Rightarrow\; T(t) = \frac{(1, 2t, 0)}{\sqrt{1+4t^2}}, \;\Rightarrow\; N(t) = \frac{(-2t, 1, 0)}{\sqrt{1+4t^2}} \;\; y \;\; k(t) = \frac{1}{(\sqrt{1+4t^2})^3},$$

y, por último verificamos que, efectivamente, la evoluta de α: $\alpha + N/k$, es la curva $e(t)$ descrita:

$$\alpha + \frac{N}{k} = (2t, 2t^2, 1) + \frac{(\sqrt{1+4t^2})^3}{\sqrt{1+4t^2}}(-2t, 1, 0) = (2t, 2t^2, 1) + (-2t - 8t^3, 1 + 4t^2, 0) = (-8t^3, 1 + 6t^2, 1).$$

2. Considera la superficie de revolución que se obtiene al girar la curva plana

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; y = f(z), \; x = 0\}$$

   respecto del ele OZ, siendo f una función positiva y $C^\infty(\mathbb{R})$.

   a) Determina una parametrización de dicha superficie.

   b) Demuestra que una de sus curvaturas principales tiene el mismo signo en todos los puntos.

   c) Da un ejemplo de función f para el cual la superficie contenga puntos parabólicos, hiperbólicos, elípticos y umbilicales, y determina un ejemplo de cada uno.

Solución. 2.a) La parametrización más simple es: $\boxed{X(z, \theta) = \Big(f(z)\cos(\theta), f(z)\,\mathrm{sen}(\theta), z\Big)}$ ya que se trata de hacer, para cada altura z, circunferencias en el plano OXY de radio $f(z)$. Para responder a 2.b) calculamos primero la base del plano tangente:

$$X_z = \Big(f'(z)\cos(\theta), f'(z)\,\mathrm{sen}(\theta), 1\Big), \quad X_\theta = \Big(-f(z)\,\mathrm{sen}(\theta), f(z)\cos(\theta), 0\Big).$$

de donde obtenemos rápidamente la matriz de la primera forma fundamental y el normal:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + f'(z)^2 & 0 \\ 0 & f(z)^2 \end{pmatrix}, \qquad y \;\; N(z, \theta) = \frac{\Big(f(z)\cos(\theta), f(z)\,\mathrm{sen}(\theta), f(z)f'(z)\Big)}{\sqrt{f(z)^2(1 + f'(z)^2)}}.$$

Para la segunda forma, calculamos las segundas derivadas

$$X_{zz} = \Big(f''(z)\cos(\theta), f''(z)\,\mathrm{sen}(\theta), 1\Big), \quad X_{\theta\theta} = -\Big(f(z)\cos(\theta), f(z)\,\mathrm{sen}(\theta), 0\Big),$$

$$y \qquad X_{z\theta} = X_{\theta z} = \Big(-f'(z)\,\mathrm{sen}(\theta), f'(z)\cos(\theta), 0\Big),$$

de donde

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{f(z)^2(1+f'(z)^2)}} \begin{pmatrix} -f(z)f''(z) & 0 \\ 0 & f(z)^2 \end{pmatrix},$$

lo que nos permite directamente (puesto que ambas matrices son diagonales) obtener la matriz de $-DN$ y las curvaturas principales sin apenas hacer operaciones:

$$matriz(-DN) = -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{f(z)^2(1+f'(z)^2)}} \begin{pmatrix} \frac{-f(z)f''(z)}{(1+f'(z)^2)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

siendo k_1 y k_2 los elementos (cambiados de signo) que aparecen en la diagonal:

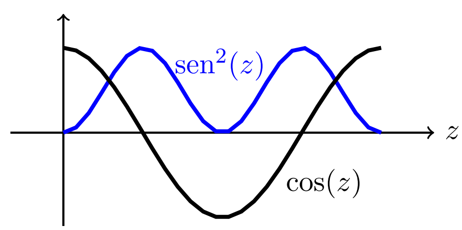
$$k_1 = \frac{f''(z)}{(\sqrt{1+f'(z)^2})^3}, \qquad k_2 = \frac{-1}{\sqrt{f(z)^2(1+f'(z)^2)}}.$$

Con esto respondemos el apartado 2.b), ya que k_2 es claramente una función que no cambia de signo (es siempre negativa).

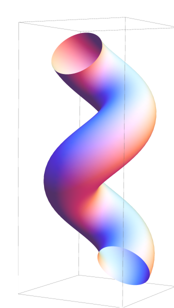
El apartado 2.c) es de libre elección, pero mirando la expresión de k_1, es obvio que cualquier función tal que $f''(z)$ cambie de signo, producirá puntos elípticos (cuando $f'' < 0$), hiperbólicos (cuando $f'' > 0$) y parabólicos (cuando $f'' = 0$). Para lo único que se requiere un poquito de cuidado, es para que haya puntos umbilicales. En este caso, probamos con una de las más simples que se nos ocurren cumpliendo todo lo requerido $f > 0$ y f'' cambiando de signo: $f(z) = 2 - \cos(z)$. Veamos que produce puntos umbilicales:

$$k_1 = k_2 \Leftrightarrow -f(z)f''(z) = (1+f'(z)^2) \Leftrightarrow \cos(z) = \operatorname{sen}^2(z),$$

que tiene infinitas soluciones (aunque no podamos resolverla explícitamente, podemos saberlo dibujando aproximadamente sus gráficas).



3. Considera la superficie tubular generada al construir un tubo de radio $r = 1$ en torno a la hélice $\alpha(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$.



   a) Clasifica el punto $P = (0, 0, \pi)$ y determina los vectores de $\mathbb{R}^3$ que determinan las direcciones principales en dicho punto.
   b) Calcula, si las hay, las direcciones asintóticas en P, y describe la indicatriz de Dupin

Solución. 3.a) Calculamos los elementos de α que necesitamos, es decir, el triedro de Frenet:

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 1\Big), \quad N(t) = (-\cos(t), -\operatorname{sen}(t), 0), \quad B(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\operatorname{sen}(t), -\cos(t), 1\Big).$$

Por lo tanto la parametrización de la superficie tubular es (con $r = 1$):

$$X(t, \theta) = \alpha(t) + r\cos(\theta)N(t) + r\operatorname{sen}(t)B(t)) =$$

$$= \Big(\cos(t) - \cos(t)\cos(\theta) + \frac{\operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(\theta)}{\sqrt{2}}, \operatorname{sen}(t) - \cos(\theta)\operatorname{sen}(t) - \frac{\cos(t)\operatorname{sen}(\theta)}{\sqrt{2}}, t + \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\sqrt{2}} \Big).$$

Notamos que $P = X(\pi, 0) = (0, 0, \pi)$, por lo que todo el ejercicio se hace en las coordenadas $(\pi, 0)$. Primero, derivando una vez, obtenemos

$$X_t(\pi, 0) = (0, 0, 1), \quad X_\theta(\pi, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1).$$

Por lo tanto, la matriz de la primera forma y el normal son, respectivamente:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}, \qquad y \;\; N(\pi, 0) = X_t \times X_\theta = (-1, 0, 0).$$

Nótese que, como $N(\pi, 0) = (-1, 0, 0)$, los cálculos de e, f y g son muy simples, pues sólo necesitamos las primeras componentes de las segundas derivadas de X. Obtendremos

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Como el signo de la curvatura de Gauss es el mismo que el del determinante de esta última matriz (que vale $\det = -\frac{1}{2} < 0$), obtenemos que el punto P es hiperbólico. No obstante, calculamos la matriz de $-DN$ para responder al resto de preguntas:

$$matriz(-DN) = -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix},$$

Ahora se obtienen fácilmente las curvaturas principales $\{k_1, k_2\} = \{1, -1\}$ y sus direcciones principales (en coordenadas respecto de X_t y X_θ) en dicho punto:

$$v_1 = (0, \sqrt{2}), \quad y \quad v_2 = (-2, \sqrt{2})$$

y, por lo tanto

$$v_1 = 0X_t + \sqrt{2}X_\theta = (0, 1, 1), \quad y \quad v_2 = -2X_t + \sqrt{2}X_\theta = (0, 1, -1).$$

3.b) A partir de los datos obtenidos, y observando que, en coordenadas,

$$v = aX_t + bX_\theta, \quad II_p(v) = (a, b) \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = b(b + a\sqrt{2})$$

simplemente la indicatriz de Dupin viene descrita por

$$v = aX_t + bX_\theta \text{ tal que } b^2 + ab\sqrt{2} = 1 \;\; o \;\; b^2 + ab\sqrt{2} = -1.$$

Por otro lado, resolviendo $II_p(v) = 0$ (obtenemos $b = 0$ ó $b = -a\sqrt{2}$), obtenemos las direcciones asintóticas (en coordenadas):

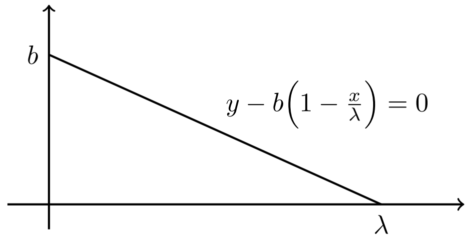
$$w_1 = (1, 0), \quad y \quad w_2 = (1, -\sqrt{2}).$$

4. Considera la familia de rectas cuyos puntos de corte con los ejes están siempre a distancia 1.

   a) Calcula la envolvente de dicha familia.

   b) Determina la circunferencia osculatriz a dicha envolvente en el punto $P = (\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$

Solución. 4.a) Si elegimos como parámetro $\lambda \in [0, 1]$ el punto de corte de cada recta con el eje OX, y llamamos (temporalmente) b al punto de corte con el eje OY, entonces la recta es $y = b - \frac{b}{\lambda}x$. Dado que la



distancia entre los puntos de corte $(\lambda, 0)$ y $(0, b)$ es constantemente 1, esto permite despejar b en función de λ

$$\lambda^2 + b^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{1 - \lambda^2}$$

Por lo tanto, la ecuación implícita de cada una de las curvas de esta familia es

$$0 = F(x, y, \lambda) = y - \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)\sqrt{1 - \lambda^2}.$$

Planteamos las ecuaciones de la envolvente:

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = \frac{\lambda^3 - x}{\lambda^2\sqrt{1 - \lambda^2}} = 0, \quad y \quad 0 = F(x, y, \lambda),$$

de donde obtenemos la envolvente (en este caso no hay puntos singulares ya que $\frac{\partial F}{\partial y} = 1$):

$$x = x(\lambda) = \lambda^3, \quad y = y(\lambda) = (1 - \lambda)^{3/2}, \quad \lambda \in [0, 1].$$

4.b) Es fácil ver que para $\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, se obtiene el punto $P = (\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ de la envolvente. Por lo tanto, lo que nos piden es obtener la circunferencia osculatriz a la curva obtenida:

$$\alpha(\lambda) = \left(\lambda^3, (1 - \lambda)^{3/2}\right), \text{ en el punto } P = \alpha(\lambda_0).$$

Para ello, necesitamos el normal $N(\lambda_0)$ y el radio de curvatura $R(\lambda_0)$. Pasamos a hacer cálculos:

$$\begin{aligned}
\alpha'(\lambda) = \left(3\lambda^2, -3\lambda(1 - \lambda)^{1/2}\right) \quad &\Rightarrow \quad T(\lambda) = \tfrac{\alpha'(\lambda)}{|\alpha'(\lambda)|} = (\lambda, -\sqrt{1 - \lambda}) \quad \text{y} \quad T'(\lambda) = (1, \lambda/\sqrt{1 - \lambda^2})\ , \\
&\Rightarrow \quad \alpha'(\lambda_0) = (\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}) \quad \text{y} \quad T'(\lambda_0) = (1, 1), \\
&\Rightarrow \quad N(\lambda_0) = \tfrac{T'(\lambda)}{|T'(\lambda)|} = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) \quad \text{y} \quad k(\lambda_0) = \tfrac{|T'(\lambda_0)|}{|\alpha'(\lambda_0)|} = \tfrac{2}{3}
\end{aligned}$$

Por lo tanto la circunferencia osculatriz tiene centro $= P + \frac{1}{k(\lambda_0)}N(\lambda_0) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y radio $R = \frac{1}{k(\lambda_0)} = \frac{3}{2}$.