AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
(Guía de contenidos por semana, hasta 7 de noviembre de 2016)

Juanjo Nieto & Manuel Calixto

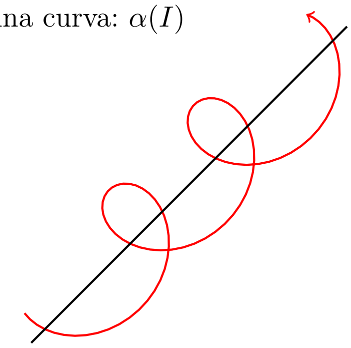
Curso 2016–17

Calendario primer cuatrimestre

		20	21	22	23	24	25
	26	27	28	29	30		
Octu.						1	2
	3	4	5	6	7	8	9
	10	11	12	13	14	15	16
	17	18	19	20	21	22	23
	24	25	26	27	28	29	30
	31						
Novi.		1	2	3	4	5	6
	7	8	9	10	11	12	13
	14	15	16	17	18	19	20
	21	22	23	24	25	26	27
	28	29	30				
Dici.				1	2	3	4
	5	6	7	8	9	10	11
	12	13	14	15	16	17	18
	19	20	21				
							8
	9	10	11	12	13	14	15
	16	17	18	19	20		

-Azul Día de clase.
LA ASISTENCIA A CLASES ES OBLIGATORIA
-Rojo Día festivo.
-2 de diciembre: 1.$^{\text{er}}$ control fijado.
-20 de enero: 2.$^{\text{o}}$ control previsto.
-8 de febrero: control final (evaluación continua).
-8 de febrero: prueba final única (sólo para los alumnos que lo hayan solicitado en plazo y les haya sido concedido).
-20 de julio: examen extraordinario para los alumnos que no hayan superado la asignatura.

Semana 1: [4 horas] (20–23 sept-16)
-Presentación
-Curvas parametrizadas
-Velocidad, puntos singulares, curva regular
-Traza de una curva: $\alpha(I)$



-**Longitud de arco**, $s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(\tau)| d\tau$.
-Param. natural (o param. por el arco) si $|\alpha'(s)| = 1$
-Regla de derivación de productos escalar y vectorial
-Vector **tangente** ($\alpha(s)$ p.p.a.): $T(s) = \alpha'(s)$
-**Curvatura** y vector **normal** ($\alpha(s)$ p.p.a.):

$$k(s) = |\alpha''(s)|, \qquad N(s) = \frac{\alpha''(s)}{k(s)}$$

-Plano **osculador** y punto singular de orden 1

$$det\Big((x, y, z) - \alpha(t),\ \alpha'(t),\ \alpha''(t)\Big) = 0.$$

-Vector **binormal** $B = T \times N$ y **triedro de Frenet**
-Rectas tangente, normal y binormal
-Plano normal y rectificante
-Ejercicios: circunferencias, hélices, reparametrización de curvas con velocidad constante...

Semana 2: [4 horas] (27–30 sept-16)
-**Torsión**: $B'(s) = \tau(s)N(s)$
-(**¡¡OJO: en muchos textos se toma $\tau \to -\tau$!!**)
-Curvas planas $\Leftrightarrow \tau = 0$
-**Fórmulas de Frenet** ($\alpha(s)$ p.p.a.)
$T' = k\,N$, $B' = \tau\,N$ y $N' = -k\,T - \tau B$
-Ecuaciones intrínsecas: $k = k(s)$ y $\tau = \tau(s)$
-**Radio de curvatura** $R = 1/\tau$
-Teorema fundamental (de curvas): k y τ determinan,

salvo movimiento rígido, una única curva.
-Triedro de frenet en curvas NO p.p.a.

$$T(t) = \frac{\alpha'}{|\alpha'|},\ B(t) = \frac{\alpha' \times \alpha''}{|\alpha' \times \alpha''|},\ N = B \times T$$

-También $N(t) = T'(t)/|T'(t)|$
-k y τ en curvas NO p.p.a.

$$k(t) = \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3},\ \tau(t) = -\frac{det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{|\alpha' \times \alpha''|^2}$$

-Ejercicios: radio de curvatura de una circunferencia, triedro, k y τ en una curva no p.p.a., plano osculador (ecuaciones de)
-Ejercicios: detección de curvas planas, curvas espirales, longitud de arco, fórmulas trigonométricas fundamentales, ...

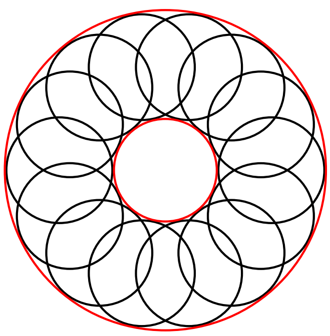
Semana 3: [5 horas] (3–7 oct-16)
-Ejercicios: producto mixto y relación con torsión, ecuación del plano osculador a partir de $\alpha'(t)$ y $\alpha''(t)$, búsqueda de puntos verificando condiciones varias,...
-**Contacto** entre curvas (planas), orden del contacto
-Curvas osculatrices, haz (significado)
  -Sistema n-dimensional de curvas
  -Circunferencias osculatrices (Leibnitz)
  -**Centro y radio** de curvatura
  -**Evoluta** de una curva (plana):

$$c(s) = \alpha(s) + R_\alpha(s) n_\alpha(s)$$

  -Propiedad de la evoluta (2–D): $t_c(s) = n_\alpha(s)$
-Problema inverso, curva **Evolvente**

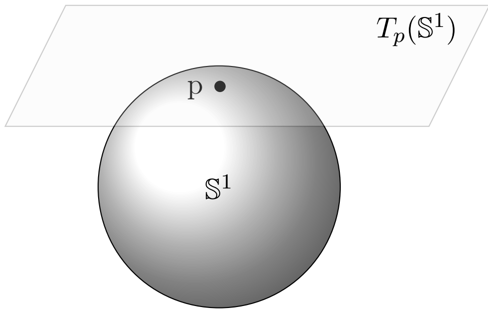
$$\alpha(s) = c(s) - (s - s_0) t_c(s)$$

-Ejercicios: cálculo de evolutas y evolventes
-**Envolvente** de una familia de curvas planas en implícitas: $\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y; \lambda) = 0$
  -Puntos singulares: $\nabla F(x, y; \lambda) = 0$.



O.Ciaurri:A-vueltas-con-la-envolvente
-**Podaria** respecto de un punto
http://www.webfract.it/RODONEE/Lumaca3.htm
-Ejercicios: cálculo de envolventes y podarias

Semana 4: [4 horas] (10–14 oct-16)
-Aplicaciones diferenciables
-Gradiente, diferencial y regla de la cadena
-Idea intuitiva de superficie: **grafo local**
-**Superficie regular**
  -Parametrización (sistema local de coordenadas)
  -Curvas coordenadas
  -Vectores tangentes y plano tangente



-Matriz $DX(u_0, v_0)$ y base de $T_p(S)$
-**Grafos** $X(u, v) = (u, f(u, v), v)$
  -Plano tangente y recta normal
-**Valor regular**, $S = F^{-1}$(valor regular)
  -Relación ∇F con plano tangente y recta normal
-**Superficies regladas**: $X(u, v) = \alpha(u) + w(v)$
-Ejemplos: Esfera, elipses, helicoide, superficie tangente a una curva, cilindros, hiperboloide, conos, paraboloide hiperbólico

Semana 5: [5 horas] (17–21 oct-16)
-Ejemplos de regladas.
-**Superficies de revolución** (eje OZ, $r > 0$)
  $X(t, \theta) = (r(t)\cos(\theta),\ r(t)\,\mathrm{sen}(\theta),\ h(t))$
-**Superficies de traslación**:
  $X(u, v) = \alpha(u) + \beta(v) - P_0$
-Ejercicios. Revolución y traslación con paso de paramétricas a implícitas y viceversa, elipses por un tubo
-Producto escalar en $\mathbb{R}^N$
-**Primera forma Fundamental** I_p
  -Cálculo de $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$ respecto de una parametrización
  -I_p en cilindro y toro
-**Longitud** de una curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$

$$L(\alpha) = \int \sqrt{(u')^2 E + (v')^2 G + 2u'v'F}\ dudv$$

-**Área de una región** $R = X(U) \subset S$

$$A(R) = \int_U \sqrt{EG - F^2}\ dudv$$

-Caso particular: grafo de una función
-**Orientación** (local) de superficies: $N(p) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}$
-Superficies no orientables: banda de Moëbius
-Repaso curvas: $N = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}$ y $k(t) = \frac{|T'(t)|}{|\alpha'(t)|}$
-Ejercicios varios

Semana 6: [6 horas] (24–28 oct-16)
-Prácticas de ordenador sobre curvas

Práctica en ZIP y en PDF

-Superficies tubulares: $r < \text{mín}(R_\alpha(t))$:

$$X(t,\theta) = \alpha(t) + r\cos(\theta)N_\alpha(t) + r\,\text{sen}(\theta)B_\alpha(t).$$

-Diferencial de N ($\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = \mathrm{w}$, $\alpha(I) \subset S$):

$$DN_p(\mathrm{w}) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (N(\alpha(t)))$$

-En coordenadas: $\mathrm{w} = u'(0)X_u + v'(0)X_v$

$$\begin{array}{ccccc} & I & \xrightarrow{\alpha} & S & \xrightarrow{N} & \mathbb{S}^2 \\ \tilde{\alpha}(t)=(u(t),v(t)) & & \searrow & \uparrow X & \nearrow & \tilde{N}(u,v) \\ & & & U & & \end{array}$$

- $DN_p(\mathrm{w}) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} (\tilde{N}(u(t),v(t))) = u'(0)\tilde{N}_u + v'(0)\tilde{N}_v$

-**Segunda forma fundamental** II_p (en $\mathrm{w} = \alpha'(0)$):

$$II_p(\mathrm{w}) = -\langle \mathrm{w}, DN_p(\mathrm{w})\rangle = \langle N(\alpha(0)), \alpha''(0)\rangle$$

-Curvatura normal y geodésica de una curva en S
-Curvatura normal en un punto y en una dirección
-Teorema de Meusnier: $II_p(\mathrm{w}) = k_\alpha \cos\measuredangle(n_\alpha, N_S) = k_n$
-**Cálculo de** $\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$ **respecto** $X(u,v)$
-Matriz de DN_p respecto de la base $\{X_u, X_v\}$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

-**Curvaturas principales y direcciones principales** como valores y vectores propios ortogonales:
$DN_p(e_1) = -k_1 e_1$ y $DN_p(e_2) = -k_2 e_2$
-**Fórmula de Euler**: si $\mathrm{w} = \cos(\theta)e_1 + \text{sen}(\theta)e_2$,
entonces $II_p(\mathrm{w}) = \cos^2(\theta)k_1 + \text{sen}^2(\theta)k_2$
-k_1 y k_2 como curvaturas normales máxima y mínima
-k_1 y k_2 como raíces de polinomio:
$(EG - F^2)k - (eG + Eg - 2fF)k + (eg - f^2) = 0$
-**Curvatura de Gauss** $K = k_1k_2 = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$
-Curvatura media $2H = (k_1 + k_2) = \frac{eG+Eg-2fF}{EG-F^2}$
-**Clasificación** de los puntos de una superficie: elípticos ($K > 0$), hiperbólicos ($K < 0$) o parabólicos ($K=0$), planos ($K=H=0$) y umbilicales ($k_1 = k_2$).
-**Líneas de curvatura**, caracterización (Teorema de Olinde–Rodrigues)
-Dirección asintótica ($II_p(\mathrm{w}) = 0$) y curva asintótica
-**Indicatriz de Dupin**:

$$\left\{ \mathrm{w} = xe_1 + ye_2 \ : \ k_1x^2 + k_2\,y^2 = 1 \text{ ó } -1 \right\} \subset T_p(S)$$

Ejercicio: todo en $S \equiv \{4x - z(y-1) = 0\}$

Semana 7: [2 horas] (4 nov-16)
-Prácticas de ordenador sobre curvas

Práctica en ZIP y en PDF

Semana 8: [5 horas] (7–11 nov-16)
-Ejercicios
-Clasificación de puntos de una superficie toroidal
-Signo$(EG - F^2) > 0$,
-Particularidades de las superficies de revolución

Ejercicios

C1. Probar la regla del producto escalar:

$$(u(t) \cdot v(t))' = u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t).$$

C2. Probar la regla del producto vectorial:

$$(u(t) \times v(t))' = u'(t) \times v(t) + u(t) \times v'(t).$$

C3. Programar con *Mathematica* el cálculo de la evoluta de una curva $2-D$ y dibujarla de manera conjunta con la curva original (elegir ejemplos). **Subirlo a SWAD antes del 28-10-16 a las 14:00h**

C4. Crear y dibujar con *Mathematica* la superficie obtenida al girar un hélice. Buscar puntos elípticos, hiperbólicos, parabólicos y umbilicales. **Subirlo a SWAD antes del 11-11-16 a las 14:00h**

Reparto de ejercicios de la relación de curvas.

Grupo	ejercicios
B11	21
B12	13
B13	19
B14	23
B15	6
B16	10
B21	8 y 22
B22	5 y 12
B23	4 y 18
B24	9 y 14
B25	7 y 16
B31	3, 11 y 21
B32	1, 17 y 20
B33	2, 13 y 15
B34	1, 6 y 19
B35	8, 10 y 22
B36	5, 12 y 18
B37	7, 9 y 23
B38	3, 14 y 16
B39	2, 11 y 20
B41	4, 6, 15 y 17

Reparto de ejercicios de las relaciones de superficies.

Grupo	ejercicios
B11	2.6
B13	1.9
B14	2.3
B16	2.5
B17	2.18
B21	1.13 y 2.6
B23	1.18 y 2.9
B24	1.12 y 2.7
B25	2.2 y 2.15
B26	1.15a y 2.14
B27	2.1 y 2.12
B31	1.2, 2.4 y 2.7
B32	1.19, 2.13 y 2.20
B33	1.8, 1.7 y 2.11
B34	1.3, 2.8 y 2.10
B36	1.4, 1.11 y 2.19
B37	1.12, 2.6 y 2.16
B38	1.9, 1.13 y 2.17
B39	1.18, 2.3 y 2.15
B41	1.15a, 2.5, 2.9 y 2.12
B45	1.3, 2.2, 2.14 y 2.18