MODELOS MATEMÁTICOS II
(Guía de contenidos por sesión, hasta 6 de junio de 2016)

Juanjo Nieto & Antonia Delgado

Curso 2015–16

CALENDARIO SEGUNDO CUATRIMESTRE

	15	16	17	18	19	20	21
	22	23	24	25	26	27	28
	29						
MARZO		1	2	3	4	5	6
	7	8	9	10	11	12	13
	14	15	16	17	18	19	20
	21	22	23	24	25	26	27
	28	29	30	31			
ABRIL					1	2	3
	4	5	6	7	8	9	10
	11	12	13	14	15	16	17
	18	19	20	21	22	23	24
	25	26	27	28	29	30	
MAYO							1
	2	3	4	5	6	7	8
	9	10	11	12	13	14	15
	16	17	18	19	20	21	22
	23	24	25	26	27	28	29
	30	31					
JUNIO			1	2	3	4	5
	6	7	8	9			

-Clases:
  Lunes de 11:00 a 12:00
  Martes de 10:00 a 12:00
  Miércoles de 10:00 a 11:00
-Azul Día de clase.
-Rojo Día festivo.
-17 de mayo: fecha 1.^{er} control fijada (contenidos hasta la sesión 29).
-24 de junio: fecha 2.^{o} control fijada
-24 de junio: prueba final única (sólo para los alumnos que lo hayan solicitado en plazo y les haya sido concedido).
-15 de septiembre: examen extraordinario para los alumnos que no hayan superado la asignatura.

Sesión 1: [1 hora] (15-feb-16)
-Presentación

Sesión 2: [2 horas] (16-feb-16)
-Motivación: curva de longitud mínima

$$\text{mín}\, L[y] := \text{mín} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'(x)^2}dx.$$

-Conexión PV, PC y formulación débil de ecuaciones
-Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones
-Ecuación de Euler–Lagrange: $\boxed{F_y - \frac{d}{dx}F_p = 0}$
-Origen histórico: ppio. de Mínima Acción (Hamilton)

Sesión 3: [1 hora] (17-feb-16)
-Extremales de un problema de minimización
-Condiciones de contorno cuando $\mathcal{D}$ no las incluye
-Ejemplos: longitud mínima
-Ecuación de E–L cuando $F_y = 0$: $\boxed{F_p = cte}$
-Ecuación de E–L cuando $F_x = 0$: $\boxed{F - \bar{y}'\, F_p = cte}$

Sesión 4: [1 hora] (22-feb-16)
-Ejemplos clásicos:
  -Oscilador armónico (Acción mínima)
  -Casos: extremal único, infinitos o ninguno...
  -Funcionales no acotados

Sesión 5: [2 horas] (23-feb-16)
-Convexidad
  -Condición suficiente de extremo
  -Mínimo local es global
  -Condición (no necesaria) de convexidad

Sesión 6: [1 hora] (24-feb-16)
-Condiciones Dirichlet, Newmann y periódicas
-Condiciones homogéneas, c. separadas
-El modelo de la viga
  -Tipos de sujección:
  empotramiento, apoyo, libertad

Sesión 7: [2 horas] (1-mar-16)
-Forma autoadjunta de una ecuación lineal
-FV de un PC autoadjunto y condiciones de contorno
-Condición suficiente ($Q < 0$) de existencia
-Paso de Dirichlet no homogéneas a homogéneas
-Alternativa de Fredholm

Sesión 8: [1 hora] (2-mar-16)
-Demostración de Fredholm
-Demostración del Teorema 9
-Resonancias

Sesión 9: [1 hora] (7-mar-16)
-La catenaria (restricciones de tipo integral)
-Problemas isoperimétricos: (área, cond. periódicas)
-Líneas geodésicas (N variables + rest. algebraicas)

Sesión 10: [2 horas] (8-mar-16)
-Problemas variacionales con varias funciones
-Restricciones de tipo algebráico
-Restricciones de tipo algebráico-diferencial
-Restricciones de tipo integral

Sesión 11: [1 hora] (9-mar-16)
-Problemas de Sturm–Liouville
  -Ejemplo: $y'' + \lambda y = 0$ en $[0, L]$
-Sucesión de valores y funciones propias
-Desarrollo en series de funciones propias

Sesión 12: [1 hora] (14-mar-16)
-Solución de p. isoperimétricos
-Solución de geodésicas en el cilindro

Sesión 13: [2 horas] (15-mar-16)
-Solución de la catenaria (cambio: $y' = \operatorname{senh}(t)$)
-Caracterización variacional de valores propios
  y funciones propias
-Ejemplos

Sesión 14: [1 hora] (16-mar-16)
-Funcionales de funciones de varias (2) variables

$$\boxed{F_y - \frac{\partial}{\partial_{x_1}} F_p - \frac{\partial}{\partial_{x_2}} F_q = 0}$$

-Formulación variacional de la Membrana

Sesión 15: [2 horas] (29-mar-16)
-La Membrana (Ecuaciones Euler–Lagrange)
  -Simplificaciones usuales
  -Modelos asociados: Poisson, Dirichlet, modos de vibración, superficies minimales, ecuación de ondas

Sesión 16: [1 hora] (30-mar-16)
-Resolviendo la ecuación de Ondas
  -Separación de variables
  -Principio de superposición
  -Necesidad del desarrollo en senos

Sesión 17: [1 hora] (4-abr-16)
-Serie trigonométrica de Fourier
-Teorema de Riesz–Fischer
-Convergencia puntual, uniforme, y de las derivadas
-Fenómeno de Gibbs en los ptos. de discontinuidad
-Ejemplo: $x = \pi - 2\sum \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$ en $[0, 2\pi]$

Sesión 18: [2 horas] (5-abr-16)
-Convergencia en media (Identidad de Parseval)
-Cambio del intervalo $[0, T]$ a $[a, b]$ y $[-L, L]$
-Extensiones par e impar: serie de cosenos/senos
-Existencia y unicidad de la ecuación de Ondas

Sesión 19: [1 hora] (6-abr-16)
-Ejemplo de resolución de Ondas
-Solución en $[0, \infty) \times \mathbb{R}$: (fórmula de D'Alembert)
-Dominio de dependencia

Sesión 20: [1 hora] (11-abr-16)
-La ecuación de Dirichlet en el disco
  -Laplaciano en polares
  -Separación de variables
  -Necesidad del desarrollo de Fourier

Sesión 22: [2 horas] (12-abr-16)
-Fórmula de Green (integral por partes)
  -Caracterización operacional de la derivada clásica
-Derivadas generalizadas (distribucional)
-Derivada débil (cuando "está" en L^1_{loc})
  -Heaviside y la Delta de Dirac
  -Espacios de Sobolev; $H^1(\Omega)$

Sesión 23: [1 hora] (13-abr-16)
-Ejercicios:
  -Operador acotado pero sin mínimo
  -Serie de $(x^3 - x) = \frac{12}{\pi^3} \sum \frac{(-1)^n}{n^3} \operatorname{sen}(n\pi x)$
  -Ecuación de Ondas no homogénea

Sesión 24: [1 hora] (18-abr-16)
-Ejercicios:
  -Derivada débil de $\sqrt{x}$ en $(-1, 1)$
  -Relación derivada clásica y débil

Sesión 25: [2 horas] (19-abr-16)
-$H^1_0(\Omega)$: ejemplo $w(x) = 1 - |x|$ en la bola de $\mathbb{R}^2$
-Integrabilidad de $1/|x|^\alpha$ dentro y fuera de bolas
-Repaso de funcional:
  -Teorema de Riesz para espacios de Hilbert
  -Caracterización de conjuntos densos
  -Desigualdad de Poincaré

Sesión 26: [1 hora] (20-abr-16)
-Ejercicio individual de evaluación continua

Sesión 27: [1 hora] (25-abr-16)
-El Teorema de Lax–Milgram

Sesión 28: [2 horas] (26-abr-16)
-Formulación clásica/débil/variacional/distribucional
-Resolviendo $\boxed{-\sigma\Delta u + \alpha u = f}$ en H_0^1
-Elementos finitos (introducción)

Sesión 29: [1 hora] (27-abr-16)
-Resolviendo $\boxed{-\Delta u = f}$ en H_0^1
-Solución del ejercicio del día 20

Sesión 30: [2 horas] (3-may-16)
-Leyes de acción de masas
-Concentración de equilibrio
-Modelo de Michaelis–Menten (crecimiento bacterias)
  -Reducción de variables
  -Detección de unidades físicas

Sesión 31: [1 hora] (4-may-16)
-(Repaso de Michaelis–Menten)
-Proceso de adimensionalización

Sesión 32: [1 hora] (9-may-16)
  -Positividad
  -Acotación

Sesión 33: [2 horas] (10-may-16)
  -Existencia en $[0, \infty)$
  -Comportamiento asintótico de soluciones
    -Nutrientes y encimas ligadas decrecen
    -Saturación del producto
-Introducción a los modelos de poblaciones

Sesión 34: [1 hora] (11-may-16)
-Modelos biológicos de crecimiento de poblaciones
  Malthus, exponencial
  Logístico
  Efecto Allé (fuerte)

Sesión 35: [1 hora] (16-may-16)
-Movimiento en poblaciones biológicas
  -Tipos de movimientos: difusión
  -Corriente y flujo sobre la frontera
  -Ley de Fick (Ley de Fourier): ecuación del calor

Sesión 36: [2 horas] (17-may-16)
-Control individual de evaluación continua

Sesión 37: [1 hora] (18-may-16)
-Conexión entre Calor y movimiento Browniano
-Hipótesis $\delta^2/(2\tau) \to D$: régimen parabólico
-Velocidad infinita de propagación: $\delta/\tau \to \infty$

Sesión 38: [1 hora] (23-may-16)
-Clase de Schwartz
-Transformada de Fourier y transformada inversa
-Función de Gauss $G(x) := e^{-\pi x^2}$.
-Convolución

Sesión 39: [2 horas] (24-may-16)
-Propiedades de la transformada de Fourier
  -Biyectiva, $\hat{G} = G$, relación con derivadas, con homotecias y con la convolución
  -$(G_\varepsilon * f) \stackrel{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} f$, y $\hat{\delta} = 1$
-Propiedades de la convolución
  -Young, soporte, regularidad, unidad

Sesión 40: [1 hora] (25-may-16)
-Solución de la ecuadión de difusión (del calor)
  -Transformada de Fourier
  -Sol. fundamental $U = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4Dt}\right\}$
  -Existencia y unicidad $u = U * f$

Sesión 41: [1 hora] (30-may-16)
-Propiedades de la solución del calor
  -Conservación de la “masa"
  -Decaimiento en tiempo
  -Disipación de energía

Sesión 42: [2 horas] (31-may-16)
-Ecuaciones de reacción–difusión
-Adimensionalización en FKPP y biestable
-Soluciones de tipo onda viajera
  -Ecuación del perfil de la onda
  -Velocidad de la onda, signo

Sesión 43: [1 hora] (1-jun-16)
-Ondas viajeras en la ecuación biestable:
$f(u) = u(1-u)(\beta - u)$

$$U(\xi) = \frac{1}{1 + Ke^{\frac{x}{\sqrt{2}}} + 1}, \quad c = \sqrt{2}\Big(\frac{1}{2} - \beta\Big)$$

Sesión 44: [1 hora] (6-jun-16)
-Ondas viajeras en la ecuación FKPP
  -Puntos de equilibrio, linealización
  -Diagrama de fases en $(0,0)$ ($\Rightarrow$ *velocidad* ≥ 2)

Sesión 45: [2 horas] (7-jun-16)
-Ondas viajeras en la ecuación FKPP: $f(u) = u(1-u)$
  -Diagrama de fases en $(1,0)$
  -Triángulo invariante
  -Existencia de ondas viajeras para $c \geq 2$

Sesión 46: [1 hora] (8-jun-16)
-Morfogénesis y la formación de patrones (introd.)

Ejercicios Voluntarios

1. Reenunciar y demostrar el teorema 6 para funcionales F estrictamente convexos.

2. Forma variacional de la viga. Demuestra que la ecuación de la viga es una condición necesaria que ha de cumplir un posible extremo del funcional siguiente:

$$\mathcal{F}[u] := \int_0^L \Big(M \frac{(u''(x))^2}{2} - N \frac{(u'(x))^2}{2} - f(x)u(x) \Big) dx.$$

definido en un conjunto adecuado.

3. Calcular $\hat{R}(x)$ en el Teorema 10.

4. Equivalente al Teorema 10 para Newmann.

5. Teorema de Fredholm para el caso periódico.

6. Serie de Fourier (de senos) de $(x^3 - x)$.

7. Integrabilidad de $1/|x|^\alpha$ fuera de bolas.

8. Comprobar que en el modelo de Michaelis–Menten, el producto $p(t)$ satura, concretamente que

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = s_0.$$

9. Propiedad $sop(f * g) \subseteq sop(f) + sop(g)$.

10. Adimensionalización de la ecuación biestable.

11. Velocidad en ondas viajeras crecientes.