Universidad de Granada **Convocatoria Junio** MODELOS MATEMÁTICOS II
Dept. Matemática Aplicada 24–Junio–2016 GRADO MATEMÁTICAS
Facultad de Ciencias Y DOBLE GRADO CON ING. INFORMÁTICA

EJERCICIO 1. Sea $I = (-1,1)$ y se definen $a(u,v) = \int_I u''(x)v''(x)\,dx$ y $F(v) = \int_I f\,v\,dx$, donde f viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } -1 \le x \le 0, \\ \frac{1}{2}(1-x), & \text{si } 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Se considera el problema de encontrar $u \in H_0^2(I)$ tal que[1]

$$a(u,v) = F(v), \quad \forall v \in H_0^2(I). \tag{1}$$

1.a) ¿Está f en $L^2(I)$? ¿Tiene derivada débil en $L^2(I)$? ¿Tiene derivada débil en algún otro espacio? En caso afirmativo, calcúlala y enuncia el concepto de derivada débil que estás usando.

1.b) Usando apropiadamente la desigualdad de Poincaré, demuestra que existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(v,v) \ge \alpha \|v\|^2_{H^2(I)}.$$

1.c) Demuestra que $a(\cdot,\cdot)$ es bilineal y continua en $H^2(I) \times H^2(I)$. Demuestra que F es lineal y continua en $H^2(I)$.

1.d) Estudia la existencia y unicidad de (1) en $H_0^2(I)$.

1.e) Determina justificadamente qué relación hay entre las soluciones de (1) en $H_0^2(I)$ y las de

$$\mathcal{F}[u] = \min_{v \in H_0^2(I)} \{\mathcal{F}[v]\}, \quad \text{con } \mathcal{F}[v] = \frac{1}{2}a(v,v) - F(v). \tag{2}$$

1.f) Si $u \in H_0^2(I)$ es una solución de (2), determina justificadamente las condiciones de regularidad sobre u que necesitas para deducir la ecuación de Euler-Lagrange asociada. Escribe dicha ecuación y sus condiciones de contorno.

Solución. 1.a) Primero notamos que f está acotada, ya que $|x+1| < 1$ cuando $x \in [-1,0]$ y $\frac{1}{2}|1-x| < \frac{1}{2}$ cuando $x \in (0,1]$. Por lo tanto, cualquier potencia suya es integrable en un intervalo compacto, en particular

$$\int_I |f(x)|^2 dx \le \int_I 1 dx = |I| = 2 < \infty.$$

Ahora pasamos a calcular su derivada. Tomamos $\phi \in C_0^1(I)$ y calculamos

$$\int f(x)\phi'(x)dx = \int_{-1}^0 (x+1)\phi'(x)dx + \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x)\phi'(x)dx \overset{partes}{=} = -\int_{-1}^0 \phi(x)dx + \int_0^1 \frac{1}{2}\phi(x)dx + \frac{1}{2}\phi(0).$$

Por lo tanto $f' = g - \frac{1}{2}\delta_0$ donde $g(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x \le 0, \\ -\frac{1}{2}, & 0 < x \le 1, \end{cases}$ y δ_0 es la Delta de Dirac (que NO es una función de $L^1_{loc}(I)$. Por lo tanto f no tiene derivada débil.

[1]Recuérdese que los elementos del espacio de Hilbert $H^2(I)$ son las funciones $u \in L^2(I)$ cuyas derivadas débiles hasta orden dos existen y pertenecen a $L^2(I)$. La siguiente expresión define una norma en $H^2(I)$:

$$\|u\|^2_{H^2(I)} = \|u\|^2_{L^2(I)} + \|u'\|^2_{L^2(I)} + \|u''\|^2_{L^2(I)}.$$

1.b) Para probar la coercividad de a usamos la desigualdad de Poincaré tanto para $v \in H_0^2 \subseteq H_0^1$ como para su derivada, ya que $v' \in H_0^1$, obteniendo $\|v\|_{L^2}^2 \leq C\|v'\|_{H^1}^2$ y $\|v'\|_{L^2}^2 \leq C\|v''\|_{H^1}^2$. Combinándolas, obtenemos,

$$\|v\|_{H^2(I)}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2 + \|v''\|_{L^2}^2 \leq (C+1)\|v'\|_{L^2}^2 + \|v''\|_{L^2(I)}^2 \leq (C(C+1)+1)\|v''\|_{L^2}^2,$$

que es la desigualdad buscada con $\alpha = (C(C+1)+1)^{-1}$, ya que $a(v,v) = \|v''\|_{L^2(I)}^2$.

1.c) Las liberalidades de a y f son consecuencia inmediata de cuatro hechos: la integral es lineal, derivar es lineal, el producto es bilineal, y el producto por una función fija es lineal. La continuidad también es bastante obvia (una vez comprobado en 1.a) que f es L^2) usando Cauchy-Schwartz

$$|a(u,v)| \leq \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^2}\|v\|_{H^2}, \qquad |F(v)| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^2}.$$

1.d) La existencia y unicidad de solución del problema (1) en $H_0^2(I)$ es consecuencia del Teorema de Lax-Milgram, cuyas hipótesis son precisamente lo que se ha verificado en los apartados anteriores.

1.e) La segunda parte del Teorema de Lax-Milgram relaciona estos problemas en el caso en que a sea simétrica, que es, trivialmente, nuestro caso. Concretamente dice que si a es simétrica, (1) y (2) poseen la misma única solución.

1.f) Para responder, realizamos primero los cálculos necesarios para obtener la ecuación de E–L. Tomamos una función $\phi \in C_0^\infty(I)$ cualquiera y llamamos $g(s) := \mathcal{F}[u+s\phi]$ (notamos que $u+s\phi$ sigue estando en $H_0^2(I)$), de modo que g alcanza un mínimo en $s=0$ y podemos escribir $g'(0)=0$. Realizamos este cálculo:

$$g'(s) = \frac{d}{ds}\int_I \Big(\frac{1}{2}(u''+s\phi'')^2 - f(u+s\phi)\Big)dx = \int_I \Big((u''+s\phi'')\phi'' - f\phi\Big)dx$$

por lo que $g'(0)=0$ queda $0 = \int_I (u''\phi'' + f\phi)dx$. Haciendo en la primera integral dos integraciones por partes, para quitarle las dos derivadas a la función ϕ, queda

$$0 = \int_I (u''\phi'' - f\phi)dx = \Big[u''\phi'\Big]_{-1}^{1} - \Big[u'''\phi\Big]_{-1}^{1} + \int_I (u'''' - f)\phi\, dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(I).$$

El segundo sumando es cero, puesto que ϕ se anula en los extremos del intervalo, pero para anular el primero, hemos de añadir condiciones nulas de la derivada segunda. Dado que también necesitamos usar la derivada cuarta, concluimos que: “Si $u \in C^4(I)$ es el mínimo de $\mathcal{F}$ cumpliendo las condiciones de contorno $u(-1)=u(1)=u''(-1)=u''(1)=0$, entonces cumple la ecuación: $u''''(x) = f(x)$”.

EJERCICIO 2. Sea $I = \big[0, 2(e^{\frac{\pi}{2}}-1)\big]$. Se considera el problema consistente en minimizar el funcional

$$\mathcal{F}[y] := \int_I \Big(1+\frac{x}{2}\Big)^2 \big(y'(x)\big)^2\, dx \quad \text{ en } \quad \mathcal{D} = \Big\{ y \in C^1[I];\ \int_I y(x)^2\, dx = 1,\ \int_I y(x)\phi(x)\, dx = 0 \Big\},$$

siendo $\phi \in C^1[I] \cap C^2(I)$ una solución no nula del problema de contorno

$$\Big(\Big(1+\frac{x}{2}\Big)^2\phi'\Big)' + \Big(\frac{1}{16}+1\Big)\phi = 0\,, \quad \phi'(0) = \phi'\big(2(e^{\frac{\pi}{2}}-1)\big) = 0\,. \tag{3}$$

Calcula de forma justificada el mínimo, si existe, de $\mathcal{F}[y]$ en $\mathcal{D} \cap C^2(I)$.

Solución. Antes de aplicar el teorema general de problemas variacionales con restricciones integrales (que podría conllevar cierta dificultad) observamos que la primera restricción es una normalización y la segunda es de ortogonalidad a la función ϕ, de modo que podría ser de aplicabilidad el teorema de formulación variacional de problemas de Sturm-Liouville. De hecho, si tomamos $0 < P(x) = (1+x/2)$, $Q(x) = 0$ y $S(x) = 1$ y nos planteamos minimizar:

$$\mathcal{F}[y] := \int_I \Big(1+\frac{x}{2}\Big)^2 \big(y'(x)\big)^2\, dx \quad \text{ en } \quad \mathcal{D}_{\mathcal{S}} = \Big\{ y \in C^1[I];\ \int_I y(x)^2\, dx = 1 \Big\},$$

sabemos que su ecuación de Euler-Lagrange es el problema de Sturm-Liouville $(Py')' + \lambda y = 0$, con y' nula en los extremos del intervalo (recordamos que, al no haber condiciones de contorno en $\mathcal{D}_S$, la condición es $F_p = 0$ y en este caso se obtiene $Py' = 0$, es decir, condiciones Newmann homogéneas). Concretando, el problema de S-L es

$$\left(\left(1+\frac{x}{2}\right)^2 y'\right)' + \lambda y = 0\,, \quad y'(0) = y'\big(2(e^{\frac{\pi}{2}}-1)\big) = 0\,. \tag{4}$$

Efectivamente, por lo dicho en el enunciado, la función ϕ cumpliendo (3), no es más que, por definición, una autofunción del problema (4) asociada al valor propio $\lambda = 1 + \frac{1}{16}$. Por lo tanto, ya sabemos que sólo hay dos posibles respuestas:

-O bien $\lambda = 1 + \frac{1}{16} = \lambda_0$, ES el primer autovalor de (4), con lo cual el mínimo se alcanzaría en la siguiente autofunción ϕ_1 (normalizada) y su valor sería el siguiente autovalor $\lambda_1 = \mathcal{F}[\phi_1]$;

-O bien $\lambda = 1 + \frac{1}{16}$, NO ES el primer autovalor de (4), en cuyo caso el mínimo se alcanzaría en la primera autofunción ϕ_0 (normalizada) y su valor sería el primer autovalor $\lambda_0 = \mathcal{F}[\phi_0]$;

En este punto, podríamos ser eficientes y optar por calcular todos los autovalores de (4), pero antes vamos a ver que la respuesta es muy sencilla. Si observamos al funcional $\mathcal{F}$, es trivial observar que $\mathcal{F}[y] \geq 0$ para toda y, y que, como sólo involucra derivadas de y, al evaluar sobre funciones constantes $y \equiv C$ se tiene $\mathcal{F}[C] = 0$, es decir, alcanza su mínimo. Por ello, si tenemos la suerte de encontrar alguna constante en $\mathcal{D}$, ó dicho de forma equivalente, si las constantes fueran autofunciones de (4), habremos acabado, el mínimo será cero y se alcanzará sobre la constante que tenga norma 1.

Vamos a concluir pues este ejercicio de las tres formas posibles:

-A: Viendo que las constantes son autofunciones de (4);

-B: Viendo que hay una constante en $\mathcal{D}$;

-C: Calculando todos los autovalores de (4).

A. Ver que las constantes son autofunciones de (4) es casi trivial. Primero notamos que las constantes cumplen trivialmente las condiciones de contorno (derivada nula) y luego, si sustituimos una constante (no nula) en la ecuación, obtenemos: $0 + \lambda C = 0$, es decir, que sí son autofunciones y que su valor propio asociado es $\lambda_0 = 0$.

B. Para ver que hay una constante (de hecho, 2) en $\mathcal{D}$ notamos que las constantes son $C^1[I]$; que al imponer la normalización, obtenemos dos posibles:

$$\int_I C^2\,dx = 1 \qquad \Rightarrow \qquad C = \pm\sqrt{2(e^{\frac{\pi}{2}}-1)},$$

y que la ortogonalidad con ϕ, se obtiene usando (3) como sigue

$$\int_I C\phi\,dx = \frac{-C}{1+\frac{1}{16}}\int_I \left(\left(1+\frac{x}{2}\right)^2\phi'\right)' dx = \frac{-C}{1+\frac{1}{16}}\Big(e^{\pi}\phi'(2(e^{\frac{\pi}{2}}-1) - \phi'(0)\Big) = 0.$$

C. Para calcular todos los autovalores de (4), como es una ecuación e tipo Euler, hacemos el cambio de variable estándar: $\boxed{(1+\frac{x}{2}) = e^t}$, de donde

$$z(t) = y(x), \;\; \Rightarrow \;\; z'(t) = y'(x)2e^t, \;\; \Rightarrow \;\; z''(t) = y''(x)4e^{2t} + y'(x)2e^t,$$

y, sustituyendo, obtenemos la siguiente ecuación:

$$0 = (1+\frac{x}{2})^2 y'' + (1+\frac{x}{2})y' + \lambda y = \frac{z''}{4} - e^t\frac{y'}{2} + e^t y' + \lambda z = \frac{1}{4}(z'' + z' + 4\lambda z) \tag{5}$$

y las condiciones de contorno:

$$y'(0) = y'\big(2(e^{\frac{\pi}{2}}-1)\big) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; z'(0) = z'\big(\frac{\pi}{2}\big) = 0. \tag{6}$$

Para calcular los posibles valores propios, determinamos las raíces del polinomio característico: $p(\mu) := \mu^2 + \mu + 4\lambda$, que son

$$\mu_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{1-16\lambda}}{2},$$

lo que nos plantea los siguientes casos:

$\boxed{16\lambda < 1}$ En este caso las dos raíces son reales y las soluciones de la ecuación (5) son $z(t) = Ae^{\mu_+ t} + Be^{\mu_- t}$. Al imponer las condiciones de contorno (6) obtenemos:

$$\mu_+ A + \mu_- B = 0, \qquad \mu_+ e^{\frac{\pi\mu_+}{2}} A + \mu_- e^{\frac{\pi\mu_-}{2}} B = 0.$$

Como buscamos soluciones no nulas ($(A,B) \neq (0,0)$), vemos estas igualdades como un sistema de ecuaciones en (A,B) y, para que tenga soluciones no nulas, ha de tener determinante nulo, es decir

$$\mu_- \, \mu_+ \Big(e^{\frac{\pi\mu_-}{2}} - e^{\frac{\pi\mu_+}{2}} \Big) = 0$$

lo que es posible cuando $\mu_+ = 0$ (descartamos $\mu_- = 0$ porque cumple $\mu_- < -1/2$), es decir:

$$\mu_+ = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-1+\sqrt{1-16\lambda}}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0.$$

Por lo que encontramos el valor propio $\boxed{\lambda_0 = 0}$ y, volviendo atrás, las autofunciones $\phi_0 = A \in \mathbb{R}$.

$\boxed{16\lambda = 1}$ En este caso hay una única raíz real $\mu = -1/2$ doble, y las soluciones de la ecuación (5) son $z(t) = Ae^{-t/2} + Bte^{-t/2}$, pero al imponer las condiciones de contorno (6) sólo obtenemos la solución nula.

$\boxed{16\lambda > 1}$ En este caso hay dos raíces complejas conjugadas, y las soluciones de la ecuación (5) son

$$z(t) = e^{-t/2}\Big(A\cos(\beta t) + B\,\mathrm{sen}(\beta t)\Big), \qquad \textit{donde} \qquad \beta := \frac{\sqrt{16\lambda - 1}}{2}$$

Calculamos su derivada,

$$z'(t) = \frac{-1}{2} e^{-t/2}\Big(A\cos(\beta t) + B\,\mathrm{sen}(\beta t)\Big) + \beta e^{-t/2}\Big(- A\,\mathrm{sen}(\beta t) + B\cos(\beta t))\Big)$$

para imponer las condiciones de contorno (6):

$$\frac{-1}{2}A + \beta B = 0, \qquad A\Big(\frac{-1}{2}\cos(\beta\frac{\pi}{2}) - \beta\,\mathrm{sen}(\beta\frac{\pi}{2})\Big) + B\Big(\frac{-1}{2}\mathrm{sen}(\beta\frac{\pi}{2}) + \beta\cos(\beta\frac{\pi}{2})\Big) = 0.$$

Si observamos estas igualdades como ecuaciones en A y B, la existencia de soluciones no nulas equivale a que la matriz de coeficientes no sea regular. Por ello, calculamos su determinante e igualamos a cero, obteniendo:

$$\frac{-1}{2}\Big(\frac{-1}{2}\mathrm{sen}(\beta\frac{\pi}{2}) + \beta\cos(\beta\frac{\pi}{2})\Big) - \beta\Big(\frac{-1}{2}\cos(\beta\frac{\pi}{2}) - \beta\,\mathrm{sen}(\beta\frac{\pi}{2})\Big) = \Big(\frac{1}{4} + \beta^2\Big)\mathrm{sen}(\beta\frac{\pi}{2}) = 0.$$

De donde deducimos finalmente el resto de los valores propios:

$$\mathrm{sen}(\beta\frac{\pi}{2}) = 0 \Leftrightarrow \beta\frac{\pi}{2} = n\pi \Leftrightarrow \frac{\sqrt{16\lambda-1}}{4} = n \Leftrightarrow \boxed{\lambda_n = n^2 + \frac{1}{16}}, \; n = 1,2,3,...$$

Constatamos ahora que, ϕ es la segunda función propia del problema S-L y que su valor propio asociado es $1 + \frac{1}{16} = \lambda_1$.

Encualquier caso, el mínimo de $\mathcal{F}$ es $0 = \lambda_0$ y lo alcanza sobre una constante C (la que tiene norma 1 que hemos escrito antes).

EJERCICIO 3. Encuentra explícitamente la solución $u = u(t,x)$ del siguiente problema de Cauchy para la ecuación de ondas, planteado en el intervalo $[0, 2\pi]$:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = \partial_x^2 u \quad \text{en } (0,\infty)\times(0,2\pi), \\ u(t,0) = u(t,2\pi) = 0 \quad \text{para } t \in (0,\infty), \\ u(0,x) = |x-\pi| - \pi \quad \text{para } x \in [0,2\pi], \\ \partial_t u(0,x) = \operatorname{sen}(2x) \quad \text{para } x \in [0,2\pi]. \end{cases}$$

Solución. Esbozamos los pasos teóricos dados en clase. Primero buscamos soluciones no nulas en variables separadas $u(t,x) = T(t)W(x)$. Al imponer estos perfiles se obtienen sendos problemas

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \quad y \quad W''(x) + \lambda W(x) = 0, \ \textit{con } W(0) = W(2\pi) = 0.$$

Al resolver el problema de S-L en x, obtenemos la sucesión de autovalores $\lambda_n = \frac{n^2}{4}$ y autofunciones (soluciones no nulas) $W_n(x) = \operatorname{sen}(\frac{nx}{2})$. Al sustituir los λ_n en la ecuación de T, obtenemos finalmente una familia de funciones soluciones de la ecuación de ondas con las condiciones de contorno:

$$u_n(t,x) = T_n(x)W_n(x) = \Big(A\cos\big(\frac{nt}{2}\big) + B\operatorname{sen}\big(\frac{nt}{2}\big)\Big)\operatorname{sen}\big(\frac{nx}{2}\big).$$

Usando el principio de superposición, proponemos la solución de la forma

$$u(t,x) = \sum_{n\geq 1}\Big(A_n\cos\big(\frac{nt}{2}\big) + B_n\operatorname{sen}\big(\frac{nt}{2}\big)\Big)\operatorname{sen}\big(\frac{nx}{2}\big),$$

e imponemos las condiciones iniciales para calcular los coeficientes A_n y B_n.

$$u(0,x) = \sum_{n\geq 1} A_n \operatorname{sen}\big(\frac{nx}{2}\big) = |x-\pi| - \pi, \qquad \partial_t u(0,x) = \sum_{n\geq 1}\frac{nB_n}{2}\operatorname{sen}\big(\frac{nx}{2}\big) = \operatorname{sen}(2x).$$

En este caso, deducimos inmediatamente $B_4 = 1/2$ y $B_n = 0$ para $n \neq 4$, pero para determinar los A_n necesitamos la serie de Fourier de $u_0(x) = |x-\pi| - \pi$, en el intervalo $[0,2\pi]$. Como sabemos es

$$u_0(x) = \sum_{n\geq 1} a_n \operatorname{sen}\big(\frac{nx}{2}\big), \quad \textit{donde} \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_0(x)\operatorname{sen}\big(\frac{nx}{2}\big),$$

por lo que simplemente nos resta calcular los a_n y escribir $A_n = a_n$.

$$\begin{aligned} \pi a_n &= \int_0^{2\pi} u_0(x)\operatorname{sen}\big(\frac{nx}{2}\big)dx = \int_0^{\pi}(-x)\operatorname{sen}\big(\frac{nx}{2}\big)dx + \int_{\pi}^{2\pi}(x-2\pi)\operatorname{sen}\big(\frac{nx}{2}\big)dx \overset{partes}{=} \\ &= -\int_0^{\pi}\frac{2}{n}\cos\big(\frac{nx}{2}\big)dx - \Big[\frac{2x}{n}\cos\big(\frac{nx}{2}\big)\Big]_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi}\frac{2}{n}\cos\big(\frac{nx}{2}\big)dx - \Big[\frac{2(x-2\pi)}{n}\cos\big(\frac{nx}{2}\big)\Big]_{\pi}^{2\pi} \\ &= -\Big[\frac{4}{n^2}\operatorname{sen}\big(\frac{nx}{2}\big)\Big]_0^{\pi} - \Big(\frac{2\pi}{n}\cos\big(\frac{n\pi}{2}\big)\Big) + \Big[\frac{4}{n^2}\operatorname{sen}\big(\frac{nx}{2}\big)\Big]_{\pi}^{2\pi} + \Big(\frac{2\pi}{n}\cos\big(\frac{n\pi}{2}\big)\Big) \\ &= -\Big(\frac{4}{n^2}\operatorname{sen}\big(\frac{n\pi}{2}\big)\Big) - \Big(\frac{4}{n^2}\operatorname{sen}\big(\frac{n\pi}{2}\big)\Big) = \frac{-8}{n^2}\operatorname{sen}\big(\frac{n\pi}{2}\big). \end{aligned}$$

Como vemos que $a_n = 0$ si n es par, reenumeramos sólo los impares $n = 2k-1$, de modo que

$$\pi a_{2k-1} = \frac{-8}{(2k-1)^2}\operatorname{sen}\big(\frac{(2k-1)\pi}{2}\big) = \frac{-8}{(2k-1)^2}(-1)^{k+1} = \frac{8}{(2k-1)^2}(-1)^k.$$

Para concluir, simplemente escribimos la solución obtenida:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)\operatorname{sen}(2x) + \frac{8}{\pi}\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{(2k-1)^2}\cos\big(\frac{(2k-1)t}{2}\big)\operatorname{sen}\big(\frac{(2k-1)x}{2}\big).$$

EJERCICIO 4. Consideramos cuatro sustancias químicas X, Y, A, B que interactúan según las siguientes reacciones:

$$A \underset{k_1}{\overset{k_2}{\rightleftharpoons}} X\,, \quad B \overset{k_4}{\to} Y\,, \quad X+X+Y \overset{k_3}{\to} X+X+X$$

donde k_1, k_2, k_3, k_4 son constantes positivas que indican la velocidad a la que ocurre cada reacción. Denotamos por x, y, a, b las concentraciones de cada una de estas sustancias químicas. Suponemos que tenemos una mezcla homogénea, de forma que x, y, a, b dependen únicamente del tiempo t. Suponemos también que las concentraciones a, b son constantes independientes del tiempo.

4.a) Usando la ley de acción de masas, escribe el sistema de ecuaciones que satisfacen x, y.

4.b) Para $\alpha, \lambda > 0$ dadas consideramos el cambio de variables

$$u(\tau) := \frac{1}{\lambda} x(\alpha\tau), \qquad v(\tau) := \frac{1}{\lambda} y(\alpha\tau).$$

- Encuentra α, λ en función de k_1, k_2, k_3, k_4, a, b de forma que el sistema resultante para u, v sea de la forma
$$\left\{ \begin{array}{l} u' = 1 - \gamma u + u^2 v, \\ v' = \beta - u^2 v. \end{array} \right. \tag{7}$$
- Encuentra β, γ en función de k_1, k_2, k_3, k_4, a, b.

4.c) Calcula el (único) estado de equilibrio (es decir, la solución constante en tiempo) de la ecuación (7) en función de γ y β.

Solución. 1.a) Aplicando la LAM para las concentraciones de X e Y (y no para A y B, que permanecen constantes), obtenemos:

$$x'' = k_2 a - k_1 x + 3k_3 x^2 y - 2k_3 x^2 y = k_2 a - k_1 x + k_3 x^2 y, \qquad y' = k_4 b - k_3 x^2 y.$$

4.b). Derivamos el cambio de variable dado, y usamos las ecuaciones previas, para obtener:

$$\begin{aligned} u'(\tau) &= \frac{\alpha}{\lambda} x'(t) = \frac{\alpha}{\lambda}\Big(k_2 a - k_1 x + k_3 x^2 y\Big) = \frac{\alpha k_2 a}{\lambda} - \alpha k_1 \frac{x}{\lambda} + \alpha k_3 \lambda^2 \frac{x^2}{\lambda^2}\frac{y}{\lambda} = \frac{\alpha k_2 a}{\lambda} - \alpha k_1 u + \alpha k_3 \lambda^2 u^2 v \\ v'(\tau) &= \frac{\alpha}{\lambda} y'(t) = \frac{\alpha}{\lambda}\Big(k_4 b - k_3 x^2 y\Big) = \frac{\alpha k_4 b}{\lambda} - \alpha k_3 \lambda^2 \frac{x^2}{\lambda^2}\frac{y}{\lambda} = \frac{\alpha k_4 b}{\lambda} - \alpha k_3 \lambda^2 u^2 v \end{aligned}$$

Por lo tanto, imponiendo (7) e igualando coeficientes, nos queda

$$\left. \begin{array}{l} \dfrac{\alpha k_2 a}{\lambda} = 1, \\ \alpha k_3 \lambda^2 = 1. \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{k_2^2 a^2 k_3}}, \quad y \quad \lambda = \sqrt[3]{\frac{k_2 a}{k_3}},$$

y las dos constantes restantes son simplemente

$$\gamma = \alpha k_1 = \sqrt[3]{\frac{k_1^3}{k_2^2 a^2 k_3}}, \quad y \quad \beta = \frac{\alpha k_4 b}{\lambda} = \frac{k_4 b}{k_2 a}.$$

4.c) Simplemente resolvemos

$$\left. \begin{array}{l} 1 - \gamma u + u^2 v = 0, \\ \beta - u^2 v = 0. \end{array} \right\} \Rightarrow u_{eq} = \frac{1+\beta}{\gamma}, \quad y \quad v_{eq} = \frac{\beta\gamma^2}{(1+\beta)^2}.$$