Sesión 11: (05-nov-15)

Análisis Funcional

-Espacios duales
-Topologías débiles
-Resultados de compacidad

Los espacios L^p

-La integral del producto como producto dual
-Teoremas de representación de Riesz

Relación con la derivada débil y las formulaciones débiles

Aplicación a las ecuaciones diferenciales

Repaso de Análisis Funcional: espacios duales

Dado $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, se define su DUAL:

$$X' := \{T : X \to \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C} : \ T \ \text{ continua}\}.$$

Con la norma $\|T\|_* := \sup_{x \in X} \frac{|T(x)|}{\|x\|}$, tenemos $(X', \|\cdot\|_*)$ Banach.

- Las topologías asociadas a normas se llaman FUERTES
- La acción $T(x)$ la notaremos $\langle T, x\rangle$

Iterando tenemos el BIDUAL

$$X'' := (X')' = \{\mathcal{F} : X' \to \mathbb{K} \ \text{ continuas}\}.$$

y la inyección: $X \hookrightarrow X''$, $x \mapsto \mathcal{F}_x$ tal que $\langle \mathcal{F}_x, T\rangle := \langle T, x\rangle$
(que cumple $\|\mathcal{F}_x\|_{**} = \|x\|$).
Cuando esta “inclusión” es biyectiva, X se dice REFLEXIVO.

Repaso de Análisis Funcional: topologías débiles

Dado un par dual X y X', definimos sendas topologías duales o débiles (a través de sus sucesiones convergentes):

- En X diremos que x_n converge débilmente a x: $\boxed{x_n \rightharpoonup x}$ si:

$$\langle T, x_n\rangle \to \langle T, x\rangle \text{ para todo } T \in X'.$$

- En X' diremos que T_n converge débil* a T: $\boxed{T_n \rightharpoonup T}$ si:

$$\langle T_n, x\rangle \to \langle T, x\rangle \text{ para todo } x \in X.$$

Teorema (Banach–Alaouglu–Bourbaki)

En X' los acotados son débil* (pre) compactos

($\Rightarrow$ toda sucesión acotada T_n, tiene una parcial débil* convergente a un cierto T)

Repaso de Análisis Funcional: espacios L^p.

Una función medible sobre un conjunto medible Ω de $\mathbb{R}^N$

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C},$$

está en el espacio $\mathcal{L}^1(\Omega)$ cuando su valor absoluto (o módulo) es integrable:

$$f \in \mathcal{L}^1(\Omega) \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad \int_\Omega |f(x)|\, dx < \infty.$$

Dos funciones que difieren sólo en un conjunto de puntos de medida nula son indistinguibles para la integral de Lebesgue. Definimos sobre el conjunto $\mathcal{L}^1(\Omega)$ la relación de equivalencia:

$$f \,\mathcal{R}\, g \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad \Big|\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}\Big| = 0,$$

y diremos que f y g son iguales casi por doquier ($f = g$ c.p.d.).

Repaso de Análisis Funcional: espacios L^p.

Así aparece el espacio vectorial de Banach $L^1(\Omega)$ que, en realidad, no es un conjunto de funciones, sino un conjunto de clases de funciones en el que la norma de una clase de funciones $[f]$ se calcula a través de la integral del módulo de cualquier función que esté en la clase $f \in [f]$:

$$L^1(\Omega) := \mathcal{L}^1(\Omega)\big/_{\mathcal{R}}, \quad \text{con norma} \quad \big\|[f]\big\|_{L^1(\Omega)} := \int_\Omega |f(x)|\,dx.$$

En la práctica no se habla de clases de funciones, sino de funciones simplemente, refiriéndose a un representante de la clase, aunque conviene tener claros los conceptos para hacer esa identificación mental sin cometer errores.

Repaso de Análisis Funcional: espacios L^p.

Análogamente podemos construir los espacios L^p para cada $1 \leq p < \infty$

$$f \in \mathcal{L}^p(\Omega) \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty,$$

y tras definir la relación de equivalencia de igualdad c.p.d. definimos, para cada $1 \leq p < \infty$,

$$L^p(\Omega) := \mathcal{L}^p(\Omega)\big/_{\mathcal{R}}, \quad \text{con norma} \quad \|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Repaso de Análisis Funcional: espacios L^p.

Por último se construye el espacio de funciones esencialmente acotadas (medibles y acotadas salvo eventualmente en un conjunto de medida nula):

$$f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega) \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad \exists C > 0 \text{ tal que } \Big|\{x \in \Omega : |f(x)| > C\}\Big| = 0,$$

donde definimos el supremo esencial como

$$\sup_{x\in\Omega} \mathrm{es}(|f(x)|) := \text{ínf}\left\{C > 0 : \Big|\{x \in \Omega : |f(x)| > C\}\Big| = 0\right\}.$$

Si, de nuevo, identificamos funciones que difieren en un conjunto de medida nula tendremos

$$L^\infty(\Omega) := \mathcal{L}^\infty(\Omega)\big/_{\mathcal{R}}, \quad \text{con norma} \quad \|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \sup_{x\in\Omega} \mathrm{es}(|f(x)|).$$

Repaso de Análisis Funcional: Duales de L^p

Idea base: Operadores $\equiv$ integral del producto

Dada $f \in L^{p'}$ entonces $\boxed{\langle f, g\rangle := \int_\Omega f(x)g(x)dx, \forall g \in L^p}$ define un operador sobre L^p con $\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1}$ $(1 \leq p < \infty$ y $1' := \infty)$
(la integral está bien definida por la desigualdad de Hölder)

Teorema de representación de Riesz

Así son todos los operadores sobre L^p. Y además la norma de f como operador sobre L^p es la misma que como función de $L^{p'}$, es decir, se identifican

$$(L^p)' \equiv L^{p'}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad 1 \leq p < \infty$$

Repaso de Análisis Funcional: propiedades de L^p.

Resumen de propiedades

	$L^1(\Omega)$	$L^p(\Omega)$ $1 < p < \infty$	$L^\infty(\Omega)$
completo	sí	sí	sí
reflexivo	no	sí	no
Hilbert	no	sólo si $p = 2$	no
espacio dual	$L^\infty(\Omega)$	$L^{p'}(\Omega)$ con $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$	-

Versión local: para cada $1 \leq p \leq \infty$ se tiene:

$$f \in L^p_{loc}(\Omega) \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad f \in L^p(K), \text{ para todo compacto } K \subseteq \Omega,$$

que es un espacio vectorial aunque carece de norma.

Repaso de An. Func.: Convergencia débil en L^p

Clave: acotación implica convergencia débil*

Usando el Teorema de Banach–Alaouglu–Bourbaki, como todos los L^p son duales de alguien (¡ojo, salvo L^1!), cualquier sucesión acotada tendrá una parcial que converge débil*:

$$f_n \subseteq L^p(\Omega), (1 < p \leq \infty) \text{ cumpliendo } \|f_n\| \leq C, \forall n$$

Entonces existe $f \in L^p(\Omega)$ y una parcial $\sigma(n)$ tal que

$$\int_\Omega f_{\sigma(n)}(x)\phi(x)dx \to \int_\Omega f(x)\phi(x)dx$$

para todo $\phi \in L^{p'}(\Omega)$ (y, en particular, $\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$).

Observemos lo bien que se lleva la topología débil con la derivada débil; integral del producto en todo caso

Repaso de Análisis Funcional: Derivada débil

Derivada distribucional y derivada débil

Básicamente cualquier función $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tiene derivada (vista como operador)

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \phi \right\rangle := -\int_\Omega u(x)\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i}dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Y se dice débil si existe $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \phi \rangle = \langle g, \phi \rangle$

...y pensando en ecuaciones y convergencias...

Cualquier sucesión de funciones f_n que cumpla una ecuación diferencial (en sentido débil) y que esté acotadas en algún L^p ($p > 1$), tendrá límite f, y permitirán pasar al límite en los términos lineales de la formulación débil:

$$\int_\Omega f_{\sigma(n)}(x)\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i}dx \to \int_\Omega f(x)\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i}dx$$

Repaso de Análisis Funcional: Utilidad

Dada una Ecuación Diferencial "difícil" .... $D[x] = 0$

Se construyen soluciones "aproximadas"

- Se "inventa" una ED "facil" y "parecida" .... $D_n[x_n] = 0$
- Se resuelve (para eso es fácil) ya tenemos $\{x_n\}$

Se hacen "estimaciones a priori"

- Con qué normas están acotadas las x_n ($\forall\ n$)
- Con suerte ocurre alguna de estas dos cosas:
  - $\{x_n\}$ acotada en X' (el dual de algún X)
  - $\{x_n\}$ acotada en X incluido compactamente en Y
- Entonces $x_{\sigma(n)}$ converge (débil* o en Y) a x (candidato)

Se pasa al límite en la formulación débil de $D_n[x_n] = 0$

- Términos lineales (integrales de productos): OK
- Términos no lineales: ... ¡trabajo para el matemático!