ECUACIONES DIFERENCIALES EN MECÁNICA Y BIOLOGÍA
(Guía de contenidos por sesión hasta 20 de enero de 2016)

Juanjo Nieto

Curso 2015–16

CALENDARIO PRIMER CUATRIMESTRE

		22	23	24	25	26	27
	28	29	30				
OCTUBRE				1	2	3	4
	5	6	7	8	9	10	11
	12	13	14	15	16	17	18
	19	20	21	22	23	24	25
	26	27	28	29	30	31	
NOVIEMBRE							1
	2	3	4	5	6	7	8
	9	10	11	12	13	14	15
	16	17	18	19	20	21	22
	23	24	25	26	27	28	29
	30						
DICIEMBRE		1	2	3	4	5	6
	7	8	9	10	11	12	13
	14	15	16	17	18	19	20
	21	22					
ENERO				7	8	9	10
	11	12	13	14	15	16	17
	18	19	20	21			

-Azul Día de clase.
-Rojo Día festivo/no lectivo.
-17 de diciembre: fecha 1.$^{\text{er}}$ **control fijada**
-2 de febrero: fecha 2.$^{\text{o}}$ control fijada
-2 de febrero: prueba final única (sólo para los alumnos que lo hayan solicitado en plazo y les haya sido concedido)
-12 de septiembre: examen extraordinario para los alumnos que no hayan superado la asignatura en julio.

Sesión 1: (24-sep-15)
-Presentación
-Ley de Newton
  -Partículas sometidas a campo de fuerzas
  -Ecuaciones deterministas
  -Ecuación de Liouville (Vlasov)

Sesión 2: (28-sep-15)
-Otras ecuaciones cinéticas
-Ecuaciones de transporte (notación y definiciones)
  -Forma conservativa y no conservativa: tte. puro
  -Caso especial: Liouville
  -Curvas Características: $X(t;x,s)$
  -Solución del tte. Puro: $\rho(x,t) = \rho_0(X(0;x,t))$.

Sesión 3: (1-oct-15)
-Solución del transporte en forma no conservativa
-Fórmula del transporte
-Flujo característico: $F_{st}(x) := X(t;x,s)$.
  -Ecuación de las derivadas del flujo
-¿Cuándo el flujo preserva la medida?

Sesión 4: (5-oct-15)
-Ecuación del Jacobiano: $J' = J\,\mathrm{div}(a)$
-Flujo preserva medidas $\Leftrightarrow$ $\mathrm{div}(a) = 0$
-Solución del transporte en forma conservativa
-Transporte no lineal: Ecuación de Hopf–Burgers

Sesión 5: (8-oct-15)
-Transporte no lineal: Choques
-Necesidad de una formulación débil
-Leyes de conservación: $\partial_t \rho + \mathrm{div}_x(j) = f$,
  -Densidad ρ, corriente j y fuente f.
  -Flujo a través de la frontera: $(-j \cdot n)$

Sesión 6: (15-oct-15)
-Fluidos: densidad ρ y velocidad u
-Ley de conservación de la masa: $\partial_t \rho + \mathrm{div}_x(\rho u) = 0$
  -Flujo de masa
  -Formatos integrales
-Fluidos incompresibles: $\mathrm{div}_x(u) = 0$
-Fluidos homogéneos: $\nabla_x \rho = 0$

Sesión 7: (19-oct-15)
-Derivada material: $\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla_x$.
-Teorema del transporte
-Presión
-Fluido como superposición de capas
-Fuerzas inerciales normales: $-\nabla p$

Sesión 8: (22-oct-15)
-Fuerzas inerciales laminares: tensor T de tensiones
  -Postulado de Stokes + linealidad
  -Viscosidad
-Ecuación de Navier–Stokes
-Ecuación de Euler (fluidos ideales/perfectos...)
-Número de Reynolds: $Re := \frac{\rho_0 \, U \, L}{\mu}$

Sesión 9: (26-oct-15)
-Fluidos estacionarios, ecuación de Stokes
-Fluidos isentrópicos, entalpía: w, $\nabla_x \mathrm{w} = \frac{\nabla_x p}{\rho}$
-Vorticidad de un fluido $\omega = \mathrm{rot}(u)$
-Interpretación física de la vorticidad
-Rotacional en $2-D$

Sesión 10: (29-oct-15)
-Teorema de Bernoulli
  -Líneas de corriente: $\phi'(s) = u(\phi(s), t)$
  -Efecto Venturi
  -Fuerza de la gravedad
  -Trinomio de Bernoulli: $\boxed{\rho|u|^2/2 + p + \rho g h}$
-¿Por qué vuelan los aviones?
-Formulación vorticidad–velocidad (2–D) de Euler

Sesión 11: (05-nov-15)
-Repaso de análisis funcional
  -Espacios duales y topologías débiles
  -Compacidad: las bolas son débil∗ compactas)
  -Los espacios L^p y sus duales (Teorema de Riesz)
-Top. débil ≡ derivada débil ≡ integral del producto

$$\langle f, g \rangle := \int f(x) g(x) dx$$

-Aplicación a la resolución de ecuaciones

Sesión 12: (09-nov-15)
-Euler 2–D para homogéneos e incompresibles
-Paso 1: Invertir u en función de ω: $u = K * \omega$

$$K(x) = \frac{-1}{2\pi|x|^2}(x_2, -x_1) = \mathrm{rot}_{2D}\Big(\frac{-1}{2\pi} \ln |x|\Big).$$

-Paso 2: estimaciones sobre u:
  -u está acotada (desigualdad de Hölder)
  -u es log–lipschitz
  -u decae en infinito

Sesión 13: (12-nov-15)
-Paso 2: (continuación)
  -Estimaciones sobre $|K(a) - K(b)|$
  -Integrales de potencias dentro y fuera de bolas
  -Descomposición $\mathbb{R}^2 = B_d \cup (B_1 \cap B_d^c) \cup B_1^c$
  -u es log–lipschitz, estimación

Sesión 14: (16-nov-15)
-Paso 2: (continuación)
  -u decae en infinito
-Paso 3: regularización y soluciones ε–aproximadas

$$\begin{cases} \partial_t \omega^{n+1} + u^n \cdot \nabla_x \omega^{n+1} = 0, \quad t \in [n\varepsilon, (n+1)\varepsilon] \\ u^n(x) = K * \omega^n(x, n\varepsilon) \\ \omega^{n+1}(x, n\varepsilon) = \omega^n(x, n\varepsilon) \end{cases}$$

  -u_ε está acotada
  -ω_ε preserva las normas L^1 y L^∞
  -$\bar{u}_\varepsilon$ es log–lipschitz en x y en t

Sesión 15: (19-nov-15)
-Paso 3: (continuación)
  -$\bar{u}_\varepsilon$: versión continua de u_ε
  -$\bar{u}_\varepsilon$ y u_ε convergen uniformemente a cierta u
  -ω_ε convergen débilmente a cierta ω
-Paso 4: Paso al límite
  -Formulación débil del problema aproximado
  -Paso el límite del término no lineal $u_\varepsilon \cdot \nabla_x \omega_\varepsilon$
  -$\omega = \mathrm{rot} u$ y $u = K * \omega$

Sesión 16: (23-nov-15)
-Paso 5: Unicidad
  -La logaritmico-lipschitzianidad
  -Unicidad sobre las trayectorias, la vorticidad y el campo de velocidades
  -$\omega(x, t) = \omega_0(X(0; x, t))$

Sesión 17: (26-nov-15)
-Teorema de Stokes
-Circulación: Teorema de Kelvin
-Vortes line, vortex sheet, vortex tube
-Teorema de Helmholtz
-Interpretaciones físicas (huracanes)

Sesión 18: (30-nov-15)
-Repaso (una población):
  -Leyes de acción de masas
  -Crecimiento poblacional: Malthus, logístico, Alle
  -Difusión: Calor, Ley de Fick

Sesión 19: (3-dic-15)
-Repaso (una población):
  -Reacción–difusión, ondas viajeras
-Dos poblaciones: Lotka–Volterra
  -Observaciones de d'Ancona
  -Ecuaciones presa–depredador
  -Adimensionalización y equilibrio

Sesión 20: (10-dic-15)
-Lotka–Volterra
  -Soluciones periódicas
-Modelo virus–sistema inmune
-Modelos epidemiológicos
  -Modelo SI
  -Modelo SIR

Sesión 21: (14-dic-15)
-Repaso

Sesión 22: (17-dic-15)
-Primer control de evaluación continua
(entra toda la parte de mecánica)

Sesión 23: (21-dic-15)
-Sin asistencia

Sesión 24: (7-ene-16)
-Modelo de Keller–Segel
  -Presentación
  -Soluciones débiles
  -Disipación de la energía libre

Sesión 25: (14-ene-16)
-Conservación de la masa (riguroso)
-Ley de evolución del momento (formal)
-Explosión de soluciones en dimensión 2

Sesión 26: (18-ene-16)
-Problema regularizado
-Estimaciones de las aproximaciones
-Estimación en L^p

Sesión 26: (21-ene-16)
-Estimación en L^p (continuación)

Último control: (2-feb-16)

Ejercicios.

$\boxed{\text{TT1}}$. Solución del transporte en forma no conservativa (hecho en clase).

$\boxed{\text{TT2}}$. Resolver $\partial_t\rho + y\partial_x\rho - x\partial_y\rho + 2\rho = 0$ con $\rho_0(x,y) = (1+x^2+y^2)^{-1}$.

$$X(s;(x,y),t) = x\cos(s-t) + y\,\mathrm{sen}(s-t),$$
$$Y(s;(x,y),t) = y\cos(s-t) - x\,\mathrm{sen}(s-t),$$
$$\rho(x,y,t) = e^{-2t}/(1+x^2+y^2).$$

$\boxed{\text{TT3}}$. Ecuación del Jacobiano:

$$J'(t;x,s) = J(t;x,s)\,\mathrm{div}(a)(X(t;x,s),t).$$

$\boxed{\text{TT4}}$. Solución del transporte en forma conservativa.

$$\rho(t,x) = \rho_0(X(0;x,t))\ J(0;x,t)\ e^{\left\{-\int_0^t a_0(s,X(s;x,t))ds\right\}} + \int_0^t f(s,X(s;x,t))\,J(s;x,t)\,e^{\left\{-\int_s^t a_0(\sigma,X(\sigma;x,t))d\sigma\right\}}ds.$$

$\boxed{\text{TT5 ó F14}}$. Si ρ resuelve una ecuación de transporte puro: $\partial_t\rho + a\cdot\nabla_x\rho = 0$, con condición inicial ρ_0 y cumpliéndose que $\mathrm{div}(a) = 0$ (siendo ambos ρ_0 y a tan regulares como necesitemos), entonces,

$$\|\rho(\cdot,t)\|_1 = \|\rho_0\|_1, \text{ y } \|\rho(\cdot,t)\|_\infty = \|\rho_0\|_\infty.$$

$\boxed{\text{F1}}$. Probar la conservación de la masa en la forma:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t}\rho(x,t)dx = 0.$$

$\boxed{\text{F2}}$. Teorema del transporte.

1.) $$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} g(x,t)\,dx = \int_{\Omega_t}\Big(\frac{Dg}{Dt} + g\,\mathrm{div}(u)\Big)(x,t)\,dx$$

2.) $$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t}\rho\,g(x,t)\,dx = \int_{\Omega_t}\rho\frac{Dg}{Dt}(x,t)\,dx,$$

$\boxed{\text{F3}}$. Dada $p:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ derivable, prueba que el vector gradiente $\nabla p(a)$ es perpendicular a la curva de nivel $S_a = \{x\in\mathbb{R}^N : p(x) = p(a)\}$ para cada punto a.

$\boxed{\text{F0.-voluntario}}$. Deducir la expresión del tensor de tensiones T a partir de las 4 hipótesis: Postulado de Stokes, linealidad, simetría e invarianza frente a isometrías.

$\boxed{\text{F4}}$. Prueba que si $T = \lambda\mathrm{div}(u)\mathbb{I} + 2\mu S(u)$ (donde $S(u)$ es la parte simétrica de la matriz jacobiana de u), entonces

$$\int_{\partial\Omega_t} T\cdot n\,dS = \int_{\Omega_t}\Big((\lambda+\mu)\nabla(\mathrm{div}(u)) + \mu\Delta u\Big)\,dx$$

$\boxed{\text{F5}}$. Determina cuáles de los fluidos en $\mathbb{R}^2$ cuyos campos de velocidad vienen dados por:

$$u_1(x,t) = -x/t, \qquad u_2(x,t) = t^2(-x_2, x_1),$$

$$u_3(x,t) = \frac{t}{(1-x_1^2+x_2^2)^2}\Big(2\,x_1\,x_2,\ 1+|x|^2\Big),$$

son incompresibles y, en cualquier caso, calcula el jacobiano $J(t) = J(t;x,s)$.

$\boxed{\text{F6}}$. Calcula el flujo de momento de un fluido que cumple la ecuación de Euler.

$\boxed{\text{F7}}$. Prueba que si la presión p es una función explícita de la densidad ρ, entonces el fluido es isentrópico, determinando la entalpía w también como función explícita de la densidad.

$\boxed{\text{F8}}$. Dado un vector no nulo $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{R}^3$ y la matriz antisimétrica:

$$A(u) = \begin{pmatrix} 0 & -\eta_3 & \eta_2 \\ \eta_3 & 0 & -\eta_1 \\ -\eta_2 & \eta_1 & 0 \end{pmatrix}$$

prueba que e^A es la matriz de un giro en $\mathbb{R}^3$ con respecto al vector η de ángulo $|\eta|$.

$\boxed{\text{F9}}$. Probar que: $u\cdot\nabla u = \nabla\dfrac{|u^2|}{2} - u\times \mathrm{rot}(u)$.
(ver como caso particular del F9.f).

$\boxed{\text{F9 (versión extendida)}}$. Dadas $f,g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ y $u, u_1, u_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, prueba las siguientes relaciones

F9a. $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(u)) = 0$, y $\mathrm{rot}(\nabla f) = (0,0,0)$,

F9b. $\mathrm{div}(u_1\times u_2) = u_2\cdot\mathrm{rot}(u_1) - u_1\cdot\mathrm{rot}(u_2)$,

F9c. $\mathrm{div}(\nabla f\times\nabla g) = 0$,

F9d. $\mathrm{rot}(u_1\times u_2) = u_1\mathrm{div}(u_2) - u_2\mathrm{div}(u_1)$
$\qquad -u_1\cdot\nabla u_2 + u_2\cdot\nabla u_1$,

F9e. $\mathrm{rot}(fu) = \nabla f\times u + f\,\mathrm{rot}(u)$,

F9f. $\nabla(u_1\cdot u_2) = u_1\cdot\nabla u_2 + u_2\cdot\nabla u_1$
$\qquad u_2\times\mathrm{rot}(u_1) + u_1\times\mathrm{rot}(u_2)$,

F9g. $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}(u)) = -\Delta(u) + \nabla(\mathrm{div}(u))$,

F9h. $\mathrm{rot}_{2D}(\mathrm{rot}_{1D}(\phi)) = -\Delta\phi$, para $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{F10–voluntario}}$. Teorema de descomposición de campos.

$\boxed{\text{F11}}$. Dada $f(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$, con $x\in\mathbb{R}^N$ y $\alpha\in\mathbb{R}$ y la bola de radio $d>0$: $B_d := \{x\in\mathbb{R}^N : |x|\le d\}$,

$$f\in L^p(B_d) \Leftrightarrow \alpha p < N, \quad y \quad f\in L^q(B_d^c)\Leftrightarrow \alpha q > N.$$

En ambos casos, calcula $\|f\|_{L^p(B_d)}$ y $\|f\|_{L^q(B_d^c)}$.

$\boxed{\text{F12}}$. Si $\omega\in L^p\cap L^q(\mathbb{R}^2)$ con $1<p<2<q<\infty$, prueba que $u = K*\omega\in L^\infty(\mathbb{R}^2)$.
Ayuda: repetir las cuentas hechas cuando $\omega\in L^1\cap L^\infty$ pero aplicando el Hölder adecuado y usando $\boxed{\text{F11}}$ para $|K(x)| = \frac{C}{|x|}$).

$\boxed{\text{F13}}$. Si $f\in L^1(\mathbb{R}^N)$ prueba que

$$\lim_{R\to\infty}\int_{|x|>R}|f(x)|\,dx = 0.$$

$\boxed{\text{F14}}$. Es el ejercicio $\boxed{\text{TT5}}$.

$\boxed{\text{F15}}$. Calcula la vorticidad de los fluidos del F5.

$\boxed{\text{F16}}$. Enunciar y probar el Lema de Gronwall.

$\boxed{\text{F10–voluntario}}$. Teorema de Stokes.

$\boxed{\text{F10–voluntario}}$. Los *vortex line* se conservan en la evolución del fluido.

$\boxed{\text{B1}}$. Deshacer el cambio de variables en Lotka–Volterra para determinar los equilibrios.

$\boxed{\text{B2}}$. Si $u(0)\ne 0$ y $v(0)\ne 0$, entonces la solución de Lotka–Volterra es periódica, cumpliendo

$$\omega u + v - \ln(u^\omega v) = cte.$$

$\boxed{\text{B3}}$. Probar que si T es el periodo de las soluciones de Lotka Volterra (sin dimensiones), entonces

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(\tau)\,d\tau = 1, \qquad \frac{1}{T}\int_0^T v(\tau)\,d\tau = 1.$$

$\boxed{\text{B4}}$. Enuncia el resultado anterior para el modelo con dimensiones.
$\boxed{\text{B5}}$ Determina p para que $\rho\nabla S\in L^1(\mathbb{R}^N)^N$ suponiendo que $\rho\in L^1\cap L^p(\mathbb{R}^N)$ y

$$\nabla S = -C_N\frac{x}{|x|^N}*\rho.$$

$\boxed{\text{B6}}$ Suponiendo que ρ es solución débil del modelo $2-D$ de Keller Segel, cumpliendo $(1+|x|^2)\rho\in L^\infty(0,T;L^1(\mathbb{R}^2))$, prueba rigurosamente la ley de evolución del momento:

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2}|x|^2\rho(x,t)\,dx = 4m\Big(1-\frac{m}{m_{crit}}\Big).$$