Universidad de Granada	**Control final**	MODELOS MATEMÁTICOS II
Dept. Matemática Aplicada		GRADO Y DOBLE GRADO EN
Facultad de Ciencias	2–febrero–2016	MATEMÁTICAS

$\boxed{1}$ Para dimensión $N = 1$ y suponendo que la densidad de bacterias verifica $\rho \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ para cierto $p \leq \infty$, demuestra que el término de acoplamiento de la ecuación de Keller–Segel: $\rho\, \partial_x c$ está en los mismos espacios que ρ.

$\boxed{\text{Solución:}}$ Del ejercicio 3, extraemos la definición de $\partial_x c$, en este caso

$$\partial_x c = f(x) *_x \rho, \qquad \text{siendo} \quad f(x) = \begin{cases} C_1 & si \quad x \leq 0, \\ -C_1 & si \quad x > 0 \end{cases},$$

donde notamos que $f = -C_1$ signo está claramente acotada por la constante C_1. Por lo tanto

$$|\partial_x c(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||\rho(y)|dy \leq C_1 \|\rho\|_{L^1},$$

es decir, $\partial_x c$ es una función acotada y $\|\partial_x c\|_{L^\infty} \leq C_1 \|\rho\|_{L^1}$. Por lo tanto, el producto $\rho\, \partial_x c$ se puede estimar de la forma más simple:

$$\|\rho\, \partial_x c\|_{L^p} \leq \|\partial_x c\|_{L^\infty} \|\rho\|_{L^p} \leq C_1 \|\rho\|_{L^1} \|\rho\|_{L^p},$$

lo que concluye el ejercicio.

$\boxed{2}$ Encuentra la solución $\rho((x,y),t)$ del siguiente problema de transporte:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - 2y\frac{\partial \rho}{\partial x} + 2x\frac{\partial \rho}{\partial y} + t\, y\, \rho = 0, \qquad t \geq 0,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$
$$\rho(x,y,0) = x + y.$$

$\boxed{\text{Solución:}}$ Puesto que conocemos la fórmla de la solución de FNC (sin término fuente $f = 0$, en este caso):

$$\rho((x,y),t) \quad = \quad \rho_0(X(0;(x,y),t), Y(0;(x,y),t))\ e^{\left\{-\int_0^t a_0(s, X(s;(x,y),t), Y(s;(x,y),t))ds\right\}},$$

siendo, en este caso, $a_0((x,y),t) = t\, y$ y $\rho_0(x,y) = x + y$. Así pues, sólo resta calcular las curvas características y sustituir en esta fórmula. Para ello, planteamos y resolvemos su ecuación, usando el campo que nos proporciona la ecuación: $a((x,y),t) = 2(-y,x)$:

$$\begin{cases} \binom{X}{Y}'(s) = \binom{-2Y(s)}{2X(s)} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \binom{X(s)}{Y(s)}, & s \geq 0 \\ (X(t), Y(t)) = (x,y), & t \geq 0,\ \text{y}\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \text{fijos}. \end{cases}$$

Como el sistema es bien conocido (es el oscilador armónico traspuesto), escribimos directamente su solución:

$$\exp\left(s\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos(2s) & -\operatorname{sen}(2s) \\ \operatorname{sen}(2s) & \cos(2s) \end{pmatrix}, \Rightarrow \begin{cases} X(s) = A\cos(2s) - B\operatorname{sen}(2s), \\ Y(s) = A\operatorname{sen}(2s) + B\cos(2s), \end{cases}$$

Imponiendo la condición inicial: $(X(t), Y(t)) = (x,y)$, obtenemos:

$$X(s;(x,y),t) = x\cos(2(s-t)) - y\operatorname{sen}(2(s-t)), \quad Y(s;(x,y),t) = y\cos(2(s-t)) + x\operatorname{sen}(2(s-t)).$$

Sustituimos en la fórmula anterior y obtenemos el resultado final:

$$\begin{aligned} \rho((x,y),t) &= (X(0;(x,y),t) + Y(0;(x,y),t))\ e^{\left\{-\int_0^t sY(s;(x,y),t)ds\right\}} \\ &= \Big((x+y)\cos(2t) + (y-x)\operatorname{sen}(2t)\Big)\ e^{\left\{-\int_0^t s(y\cos(2(s-t)) + x\operatorname{sen}(2(s-t)))ds\right\}} \\ &= \Big((x+y)\cos(2t) + (y-x)\operatorname{sen}(2t)\Big) \exp\left\{-\ \frac{2y\operatorname{sen}^2(t) + x(\operatorname{sen}(2t) - 2t)}{4}\right\}. \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Suponiendo que $\rho \geq 0$ es solución del modelo de Keller Segel

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \nabla_x c) = \Delta_x \rho, \qquad \nabla_x c(t,x) = -C_N \frac{x}{|x|^N} *_x \rho(t,x), \qquad \rho(0,x) = \rho_0(x),$$

con la regularidad necesaria para justificar todas las operaciones que necesites, suponiendo que la masa se conserva y que estamos en dimensión $N = 2$, deduce la ley de evolución del momento:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \rho(x,t)\, dx = m\Big(4 - C_2\, m\Big), \quad \text{donde} \;\; m = \int_{\mathbb{R}^2} \rho_0(x) dx.$$

$\boxed{\text{Solución:}}$ Como suponemos toda la regularidad que queramos, partimos de la ecuación, multiplicamos por $|x|^2$ e integramos con respecto a x para obtener

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \rho(x,t)\, dx = \int_{\mathbb{R}^2} \Big(- |x|^2 \operatorname{div}(\rho \nabla_x c) + |x|^2 \Delta_x \rho \Big) dx \overset{partes}{=} \int_{\mathbb{R}^2} \Big(2\rho x \cdot \nabla_x c - 2x \cdot \nabla_x \rho \Big) dx := I_1 + I_2.$$

donde no aparecen los términos de frontera porque suponemos que ρ y sus derivadas valen cero en infinito. En la segunda integral, volvemos a integrar por partes, obteniendo

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^2} -2x \cdot \nabla_x \rho dx = \int_{\mathbb{R}^2} 4\rho dx = \int_{\mathbb{R}^2} 4\rho_0 dx = 4m,$$

puesto que la masa se conserva. Para la primera integral, usamos la definición de c para reescribirla como

$$I_1 = 2C_2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \rho(t,x)\rho(t,y) \frac{x \cdot (y-x)}{|x-y|^2} dy dx \overset{dx \leftrightarrow dy}{=} 2C_2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \rho(t,y)\rho(t,x) \frac{y \cdot (x-y)}{|x-y|^2} dx dy$$

y observando estas dos últimas expresiones, lo reescribimos como la semisuma de ambas

$$I_1 = C_2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \rho(t,x)\rho(t,y) \, \frac{\overbrace{(x-y)\cdot(y-x)}^{=(-1)}}{|x-y|^2} \, dy dx = -C_2 \int_{\mathbb{R}^2} \rho(t,x) \Big(\int_{\mathbb{R}^2} \rho(t,y) dy \Big) dx.$$

Por lo tanto

$$I_1 = -C_2 \Big(\int_{\mathbb{R}^2} \rho(t,x) dx \Big)^2 = -C_2 m^2,$$

puesto que la masa se conserva. Juntando las expresiones de I_1 e I_2, obtenemos el resultado pedido.

$\boxed{4}$ Dado un fluido, definimos la densidad de energía cinética como $e_c = \rho \frac{|u|^2}{2}$. Determina si, para un fluido incompresible gobernado por la ecuación de Euler y en ausencia de fuerzas externas, es cierto o no que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} e_c \, dx = - \int_{\partial \Omega_t} (e_c + p)(u \cdot n)\, dS,$$

siendo Ω un dominio regular cualquiera y $\Omega_t = \{X(t; x, 0) : x \in \Omega\}$, su transportado por el fluido. En caso negativo, determina cuál sería el término de la derecha correcto.

$\boxed{\text{Solución:}}$ Puesto que el conjunto Ω_t se mueve con el tiempo, se trata de aplicar (o volver a deducir) el Teorema del transporte:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} e_c \, dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \frac{|u|^2}{2} dx \overset{Teorema}{=} \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \rho \frac{D|u|^2}{Dt} dx = \int_{\Omega_t} \rho u \cdot \frac{Du}{Dt} dx.$$

Usando entonces la ecuación de Euler: $\rho(Du/Dt) = -\nabla p$ (recordemos que $Du/Dt := u_t + u \cdot \nabla u$) queda

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} e_c \, dx = - \int_{\Omega_t} u \cdot \nabla_x p \, dx \overset{div(u)=0}{=} - \int_{\Omega_t} \operatorname{div}(pu)\, dx \overset{Gauss}{=} - \int_{\partial \Omega_t} p (u \cdot n)\, dS,$$

donde hemos aplicado la incompresibilidad y el Teorema de la divergencia de Gauss para que aparezca la frontera. Por lo que el enunciado es falso, siendo la anterior la expresión correcta.

$\boxed{5}$ Determina cuáles de los fluidos en $\mathbb{R}^2$ cuyos campos de velocidad vienen dados por:

$$u_1(x,y,t) = \Big(\frac{x^3-y^3}{x^2y^2} + \frac{y}{x^2}\,,\,\frac{x+y}{xy}\Big), \qquad u_2(x,y,t) = -2(t\,x, t\,y).$$

son incompresibles y, en ambos casos, calcula $J(t) = J(t;(x,y),0)$.

$\boxed{\text{Solución:}}$ Primero reescribimos u_1

$$u_1(x,y,t) = \Big(\frac{x^3-y^3}{x^2y^2} + \frac{y}{x^2}\,,\,\frac{x+y}{xy}\Big) = \Big(\frac{x}{y^2}\,,\,\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\Big),$$

antes de calcular su divergencia:

$$\operatorname{div}(u_1) = \partial_x\Big(\frac{x}{y^2}\Big) + \partial_y\Big(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\Big) = \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2} = 0,$$

por lo que es incompresible. En este caso usamos que J cumple el siguiente PVI:

$$J_1'(t) = J_1(t)\operatorname{div}(u_1)(X(t;(x,y),0)) = 0, \qquad J_1(0) = 1,$$

por lo que $J_1(t) = 1$ para todo t.

En el segundo caso, obtenemos $\operatorname{div}(u_2) = \partial_x(-2tx) + \partial_y(-2ty) = -4t$, por lo que el fluido NO es incompresible y hay que calcular J desde su definición. Primero requerimos de las curvas características asociadas a u_2:

$$\begin{cases} \binom{X}{Y}'(t) = \binom{-2tX(s)}{-2tY(t)}, & t \geq 0 \\ (X(0),Y(0)) = (x,y), & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \text{ fijos.} \end{cases}$$

Como es la misma ecuación (en variables separadas) repetida dos veces, hacemos sólo una:

$$X'/X = -2t \;\Rightarrow\; \ln(X) = -t^2 + C \;\Rightarrow\; X(t) = X(0)e^{-t^2} = xe^{-t^2}.$$

Por lo tanto $Y(t) = ye^{-t^2}$ y el flujo es:

$$F_{0,t}(x,y) = (X(t,(x,y),0), Y(t,(x,y),0)) = e^{-t^2}(x,y) = e^{-t^2}Id(x,y).$$

y el cálculo de J resulta casi trivial:

$$Jac(F_{0,t}) = e^{-t^2}\mathbb{I} \;\Rightarrow\; J_2(t) = \det(e^{-t^2}\mathbb{I}) = \Big(e^{-t^2}\Big)^2 = e^{-2t^2}.$$

En este caso, como $\operatorname{div}(u_2)(X(t;(x,y),0)) = -4t$, también podemos usar la ecuación para calcular J_2:

$$J_2'(t) = (-4t)J_2(t),\ y\ J(0) = 1, \;\Rightarrow\; \frac{J'}{J} = -4t \;\Rightarrow\; J_2(t) = e^{-2t^2}.$$