CONTROL CORREGIDO

$\boxed{1.}$ Encuentra la solución $\rho((x,y),t)$ del siguiente problema de transporte:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+2x\frac{\partial\rho}{\partial x}-3\frac{\partial\rho}{\partial y}((x,y),t)=(t-x-y)\rho, \qquad t\geq 0,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$
$$\rho(x,y,0)=e^{x+y}.$$

$\boxed{\text{Solución.}}$ Puesto que conocemos la fórmla de la solución de FNC (sin término fuente $f=0$, en este caso):

$$\rho((x,y),t) \quad = \quad \rho_0(X(0;(x,y),t),Y(0;(x,y),t))\ e^{\left\{-\int_0^t a_0(s,X(s;(x,y),t),Y(s;(x,y),t))ds\right\}},$$

siendo, en este caso, $a_0((x,y),t)=x+y-t$ y $\rho_0(x,y)=e^{x+y}$. Así pues, sólo resta calcular las curvas características y sustituir en esta fórmula. Para ello, planteamos y resolvemos su ecuación, usando el campo que nos proporciona la ecuación: $a((x,y),t)=(2x,-3)$:

$$\begin{cases} \binom{X}{Y}'(s)=\binom{2X(s)}{-3}, & s\geq 0\\ (X(t),Y(t))=(x,y), & t\geq 0,\ \text{y } (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \text{fijos.}\end{cases}$$

Como las ecuaciones para X e Y están desacopladas, se pueden resolver por separado (ambas lineales de orden 1) y no es preciso trabajar con matrices; obtenemos:

$$\begin{cases} X'(s)=2X(s), & s\geq 0\\ X(t)=x, \end{cases} \quad\Rightarrow\quad X(s;(x,y),t)=x\,e^{2(s-t)},$$

e

$$\begin{cases} Y'(s)=-3, & s\geq 0\\ Y(t)=y, \end{cases} \quad\Rightarrow\quad Y(s;(x,y),t)=-3(s-t)+y.$$

Sustituimos en la fórmula anterior y obtenemos el resultado final:

$$\rho((x,y),t)=e^{X(0;(x,y),t)+Y(0;(x,y),t)}\ e^{\left\{\int_0^t[s-X(s;(x,y),t)-Y(s;(x,y),t)]ds\right\}}=e^{x\,e^{-2t}+3t+y}\ e^{\left\{\int_0^t[s-x\,e^{2(s-t)}+3(s-t)-y]ds\right\}}$$
$$=\exp\left\{x\,e^{-2t}+3t+y+\frac{t^2+x(e^{-2t}-1)-3t^2-2yt}{2}\right\}=\exp\left\{t(3-y)-t^2+\frac{3}{2}x\,e^{-2t}+(y-\frac{x}{2})\right\}.$$

$\boxed{2.}$ Si definimos la densidad de energía cinética de un fluido como $e_c=\rho\frac{|u|^2}{2}$, calcula el flujo de energía cinética a través de la frontera de un conjunto Ω para un fluido incompresible que cumple la ecuación de Euler (en ausencia de fuerzas externas).

$\boxed{\text{Solución.}}$ Realizamos directamente el cálculo para obtener el flujo:

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_\Omega \rho|u|^2dx=\int_\Omega \rho_t\frac{|u|^2}{2}+\rho u_t\cdot u\,dx,$$

y usamos aquí la LCM: $\partial_t\rho+\operatorname{div}(\rho u)=0$ y la ecuación de Euler: $\rho(u_t+u\cdot\nabla u)=-\nabla p$, obtenemos

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_\Omega \rho|u|^2dx=-\int_\Omega \operatorname{div}(\rho u)\frac{|u|^2}{2}+(\rho u\cdot\nabla u+\nabla p)\cdot u\,dx,$$

lo que, desarrollando y agrupando derivadas, produce (observar la estructura $(fg)'h + (fg)h' = (fgh)'$)

$$= -\int_\Omega \Big(\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} \Big) \Big(\sum_{m=1}^{3} \frac{u_m^2}{2} \Big) + \rho \sum_{m=1}^{3} \Big(\sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \Big) u_m \, dx - \int_\Omega u \cdot \nabla p \, dx$$

$$= -\sum_{m=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \int_\Omega \overbrace{\frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} \frac{u_m^2}{2} + (\rho u_k) \frac{\partial(u_m^2/2)}{\partial x_k}}^{\frac{1}{2}\partial_{x_k}(\rho\, u_k u_m)} \, dx - \int_\Omega u \cdot \nabla p \, dx$$

$$= -\int_\Omega \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho u_k \Big(\sum_{m=1}^{3} \frac{u_m^2}{2} \Big) \right) dx + \int_\Omega u \cdot \nabla p \, dx = -\int_\Omega \operatorname{div}\Big(\rho \frac{|u|^2}{2} u \Big) dx - \int_\Omega u \cdot \nabla p \, dx.$$

Para el último término, como $\operatorname{div}(u) = 0$ (por ser incompresible), tenemos $\operatorname{div}(pu) = u \cdot \nabla p$, quedando todo en forma de divergencia, y pudiendo finalmente aplicar el Teorema de Gauss:

$$= -\int_\Omega \operatorname{div}\Big(\rho \frac{|u|^2}{2} u \Big) dx - \int_\Omega \operatorname{div}(pu) \, dx = -\int_{\partial\Omega} \Big(\rho \frac{|u|^2}{2} + p \Big) u \cdot n \, dS.$$

Por lo tanto el flujo de energía cinética a través de la frontera de un conjunto Ω es: $(e_c + p)(-u \cdot n)$.

$\boxed{3.}$ Si $f \in L^1(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3)$ y definimos

$$v(x) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x-y}{|x-y|^3} f(y) \, dy,$$

prueba que v está acotada.

$\boxed{\text{Solución.}}$ Razonamos como en clase en el caso de $\omega = K * \rho$. Primero tomamos la norma de $v(x)$ y seguidamente partimos la integral resultante dentro y fuera de la bola: $B := \{y \in \mathbb{R}^3 : |x-y| \le 1\}$

$$|v(x)| = \Big| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x-y}{|x-y|^3} f(y) \, dy \Big| \le \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|f(y)|}{|x-y|^2} \, dy = \int_B \frac{|f(y)|}{|x-y|^2} \, dy + \int_{B^c} \frac{|f(y)|}{|x-y|^2} \, dy.$$

En la primera integral (dentro de la bola) usamos que $h(y) = 1/|y-x|^2$ está en $L^{3/4}(B)$ (sabemos, por los ejercicios de clase, que está en cualquier $L^p(B)$ con $2p < 3$), por lo que podemos aplicar la desigualdad de Hölder con exponentes $p = \frac{3}{4}$ y $p' = 4$, quedando

$$\int_B \frac{|f(y)|}{|x-y|^2} \, dy \le \Big\| \frac{1}{|x - \cdot\,|^2} \Big\|_{L^{3/4}(B)} \|f\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}.$$

En la segunda integral (fuera de la bola) el argumento es más simple si cabe, usamos directamente que $1/|y-x|^2$ en B^c está acotada por 1 y que f es L^1, quedando

$$\int_{B^c} \frac{|f(y)|}{|x-y|^2} \, dy \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}.$$

Juntando sendas estimaciones, obtenemos el resultado pedido

$$|v(x)| \le C\|f\|_4 + \|f\|_1 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^3.$$

$\boxed{4.}$ Determina si un gas ideal a temperatura constante se puede considerar o no un fluido isentrópico y, en caso afirmativo, determina la entalpía.
Ayuda: Un gas ideal cumple $p = \rho RT$, siendo T la temperatura y R una constante física llamada *constante de los gases ideales*, cuyo valor es $R = 8.314472 J/(K\, mol)$.

$\boxed{\text{Solución.}}$ En realidad, este es un caso particular de fluido en que la presión es función de la densidad y que, por lo tanto, es isentrópico. En este caso,

$$p = P(\rho) = \rho RT = constante\, \rho.$$

Buscamos pues una función $W(r)$ tal que nos proporcione funcionalmente la entalpía: $\mathrm{w} = W(\rho)$. Imponemos la condición que define la entalpía, y obtenemos:

$$\nabla_x \mathrm{w} = \frac{\nabla_x p}{\rho} \quad \Rightarrow \quad W'(\rho)\nabla_x \rho = \frac{P'(\rho)\nabla_x \rho}{\rho} = \frac{RT}{\rho}\nabla_x \rho,$$

Por lo tanto, buscamos $W(r)$ tal que $W'(r) = RT/r$. Podemos pues tomar como entalpía $\mathrm{w} = RT\ln(\rho)$ y concluir que el fluido es isentrópico.

$\boxed{5.}$ Si $T = \mathrm{div}(u)\mathbb{I} + 2A(u)$ (donde $A(u)$ es la parte antisimétrica de la matriz jacobiana de u) y Tn es el producto de la matriz T por el vector n, escribe la siguiente integral como una integral (simplificada) sobre todo el conjunto Ω.

$$\int_{\partial\Omega} Tn\, dS.$$

$\boxed{\text{Solución.}}$ Se trata de invertir el Teorema de Gauss, en cada componente. Primero detallamos el tensor T:

$$T = T = \mathrm{div}(u)\mathbb{I} + 2A(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} & \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} & \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial y} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial z} & \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z} & \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{pmatrix},$$

y ahora aplicamos Gauss en cada componente, obteniendo

$$\int_{\partial\Omega} Tn\, dS = \int_\Omega \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \underline{\frac{\partial u_2}{\partial y}} + \underline{\underline{\frac{\partial u_3}{\partial z}}}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial y} - \underline{\frac{\partial u_2}{\partial x}}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \underline{\underline{\frac{\partial u_3}{\partial x}}}\Big) \\ \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \underline{\frac{\partial u_1}{\partial y}}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\underline{\frac{\partial u_1}{\partial x}} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \underline{\underline{\frac{\partial u_3}{\partial z}}}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial u_2}{\partial z} - \underline{\underline{\frac{\partial u_3}{\partial y}}}\Big) \\ \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u_3}{\partial x} - \underline{\frac{\partial u_1}{\partial z}}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \underline{\underline{\frac{\partial u_2}{\partial z}}}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(\underline{\frac{\partial u_1}{\partial x}} + \underline{\underline{\frac{\partial u_2}{\partial y}}} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\Big) \end{pmatrix} dx$$

$$\text{(los subrayados, al derivar, cancelan)} = \int_\Omega \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} \end{pmatrix} dx = \int_\Omega \Delta u\, dx,$$

con lo que concluye el ejercicio.