ECUACIONES DIFERENCIALES
Curso 10–11

Relación de ejercicios 4: **La ecuación periódica**

1.- Se considera la ecuación escalar $x' = a(t)x$ con $a \in C(\mathbb{R})$ y T–periódica. Se pide:

(a) Probar que admite soluciones T–periódicas no triviales si y sólo si $\int_0^T a(t)\,dt = 0$.

(b) Si dicha ecuación tiene soluciones nT–periódicas con $n \in \mathbb{N}$, entonces estas soluciones son T–periódicas.

(c) Si $\varphi \in C(\mathbb{R})$ admite dos periodos $0 < T_1 < T_2$ y $T_2 \notin T_1\mathbb{Q}$, entonces φ es constante.

(d) Deducir de los apartados anteriores que la ecuación no admite otras soluciones periódicas (no triviales) que las T–periódicas a menos que $a = 0$.

2.- Encontrar un sistema T–periódico con alguna solución periódica que no admita el periodo T.

3.- Sea C una matriz de monodromía para el sistema T–periódico $x' = A(t)x$. Probar que

$$\det(C) = \exp\left\{\int_0^T \operatorname{traza}(A(s))\,ds\right\}.$$

Decidir si existe algún sistema periódico 2x2 con los siguientes multiplicadores característicos:

(a) $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$.

(b) $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$.

(c) $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1$.

(d) $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$.

4.- Dado el sistema T–periódico $x' = A(t)x$, denotemos por Z_T al conjunto de todas sus soluciones T–periódicas. Demostrar que Z_T es un subespacio vectorial del conjunto de soluciones del sistema tal que $\dim(Z_T) = \dim(\operatorname{Ker}(C - I))$, donde C es una matriz de monodromía.

5.- Se considera el sistema 2π–periódico

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p^2 & 0 \end{pmatrix} x\,, \quad p > 0.$$

Encontrar una matriz de monodromía y los multiplicadores característicos.

6.- Sea $\tilde{C}$ una matriz semejante a una matriz de monodromía C del sistema T–periódico $x' = A(t)x$. ¿Es $\tilde{C}$ una matriz de monodromía de dicho sistema?

7.- Se considera la ecuación de Hill $x'' + (a + bp(t))x = 0$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $p \in C(\mathbb{R})$ es T–periódica. Sean $f_1(t)$ y $f_2(t)$ dos soluciones linealmente independientes tales que $f_1(0) = f_2'(0) = 1$ y $f_2(0) = f_1'(0) = 0$.

(a) Demostrar que los multiplicadores característicos satisfacen la ecuación

$$\lambda^2 - D(a,b)\lambda + 1 = 0\,,$$

donde $D(a,b) = f_1(T) + f_2'(T)$.

(b) Demostrar que si $-2 < D(a,b) < 2$, entonces los multiplicadores característicos son complejos conjugados con módulo igual a 1 y las soluciones, al igual que sus primeras derivadas, están acotadas en $\mathbb{R}$.

(c) Demostrar que si $D(a,b) < -2$ o bien $D(a,b) > 2$ entonces existe una solución no acotada.

(d) Demostrar que si $D(a,b) = 2$ entonces existe una solución de periodo T. Asimismo, si $D(a,b) = -2$ entonces existe una solución de periodo 2T que no es T–periódica.

(Febrero 78)

8.- Demostrar que la ecuación de Hill $x'' + p(t)x = 0$ con p continua, T–periódica, negativa y no constantemente nula, no admite soluciones T–periódicas no triviales. Análogamente, encontrar criterios de no existencia de soluciones T–periódicas para la ecuación $x'' + cx' + p(t)x = 0$ con $c > 0$.

9.- Se considera la ecuación $x' = A(t)x$, donde $A : \mathbb{R} \to M_N(\mathbb{R})$ es continua y T–periódica. Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental principal en cero y C la correspondiente matriz de monodromía. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $\Phi(t + nT) = \Phi(t)C^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $t \in \mathbb{R}$.

(b) Si λ es un valor propio de C con $|\lambda| > 1$, entonces existe una solución no acotada.

(c) Si todos los multiplicadores característicos tienen módulo menor que 1, entonces todas las soluciones tienden a cero cuando $t \to \infty$.

10.- Resolver las siguientes cuestiones:

(a) Demostrar que si la matriz A tiene un valor propio de la forma $2\pi ik/T$, con $k \in \mathbb{Z}$, entonces $x' = Ax$ tiene una solución T–periódica.

(b) Demostrar que la ecuación $x'' = f(t)$, con f continua y T–periódica, tiene soluciones T–periódicas si y sólo si $\int_0^T f(t)\,dt = 0$.

(c) Discutir la existencia de soluciones 2π–periódicas de la ecuación $y'' + \lambda^2 y = p(t)$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y p es continua y 2π–periódica.

(d) Sea la ecuación diferencial $x' = A(t)x$, con $A(t)$ continua y T–periódica. Demostrar que si un multiplicador característico es raíz n–ésima de la unidad, entonces existe una solución periódica de periodo nT.

(e) Hallar una condición necesaria y suficiente para que la ecuación $x' + (\text{sen}t)x = f(t)$, con f continua y 2π–periódica, tenga solución 2π–periódica (Septiembre 87).

(f) Demostrar que si $\int_0^T \text{traza}(A(s))\, ds > 0$ entonces el sistema T–periódico $x' = A(t)x$ no es acotado.

(g) Decidir de forma razonada si cada una de las siguientes ecuaciones tiene solución π–periódica:

$$x'' + 4x = \text{sen}(4t)\,, \quad x'' + 4x = \text{sen}(2t)\,, \quad x'' + 4x = \text{sen}(t)\,.$$

(Junio 04)

(h) Probar que el sistema lineal

$$x' = \begin{pmatrix} a(t) & 0 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix} x\,,$$

con $a, b \in C(\mathbb{R})$ y T–periódicas, admite soluciones T–periódicas no triviales si y solamente si $\int_0^T a(t)\, dt = 0$ (Junio 04).

11.- Se considera la ecuación diferencial $x' = A(t)x$, donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2}\cos^2(t) & 1 - \frac{3}{2}\text{sen}(t)\cos(t) \\ -1 - \frac{3}{2}\text{sen}(t)\cos(t) & -1 + \frac{3}{2}\text{sen}^2(t) \end{pmatrix}.$$

Comprobar que los autovalores de $A(t)$ son

$$\lambda_1 = (-1 + i\sqrt{7})/4\,, \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1}\,.$$

Verificar que $e^{t/2}\,(-\cos t, \text{sen}t)^T$ es una solución no acotada de la ecuación anterior y calcular los multiplicadores y exponentes característicos, concluyendo que la ecuación no tiene soluciones π–periódicas no triviales (ejemplo de Markus y Yamabe).

12.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostraremos que si la ecuación diferencial $x'' = f(x, x')$ no tiene soluciones constantes, entonces tampoco tiene soluciones periódicas. Para ello se sugiere seguir los siguientes pasos:

(a) Si la ecuación no tiene soluciones constantes $c \in \mathbb{R}$, probar que $f(c, 0) \neq 0$.

(b) Si existe $x(t)$ solución T–periódica de la ecuación, probar que existen t_1, t_2 tales que $x'(t_1) = x'(t_2) = 0$ y $x''(t_1) \leq 0 \leq x''(t_2)$.

13.- Se considera la ecuación

$$x' = \begin{pmatrix} -1 + \cos(t) & 0 \\ \cos(t) & -1 \end{pmatrix} x\,.$$

(a) Calcular una matriz fundamental.

(b) Encontrar un cambio de variables que la transforme en una ecuación homogénea con coeficientes constantes.

(c) Estudiar el comportamiento de las soluciones de la ecuación cuando $t \to \infty$.

(d) ¿Existe una función $b(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ y 2π–periódica, de forma que $x' = A(t)x + b(t)$, $t \in \mathbb{R}$, admita una solución 4π–periódica que no sea 2π–periódica?

(Febrero 90)

14.- Sea $a \in C(\mathbb{R})$ 2π–periódica, no negativa y no idénticamente nula. Se considera la ecuación $x'' + \lambda a(t)x = 0$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Demostrar que si $\lambda < 0$ entonces no existen soluciones 2π–periódicas distintas de la trivial.

(b) ¿Qué se puede decir si $\lambda = 0$?

(c) Dar un ejemplo que demuestre que la conclusión del primer apartado no es cierta si $\lambda > 0$.

15.- Obtener la ecuación adjunta de la primera aproximación lineal de la ecuación del péndulo $x'' + \operatorname{sen}(x) = 0$ y aplicar el teorema de la alternativa de Fredhölm a la ecuación $x'' + x = \cos(t)$ para determinar si la misma tiene o no soluciones periódicas. Para la ecuación adjunta, obtener la matriz de monodromía y transformarla en otra de coeficientes constantes. Calcular los exponentes y multiplicadores característicos.

16.- Decidir, en cada caso, si existe una función que satisfaga

(a) $y'' + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t)y = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$, y no idénticamente nula.

(b) $y + \operatorname{sen}(t)y = 0$, $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 1$.

(c) $y'' + y' + \frac{1}{2}y = 0$, $y(0) = 1$, $y(\pi/2) = 0$.

(d) $y'' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y(\pi/2) = 0$.

(e) $y'' + \frac{1}{2}y = \operatorname{sen}(t)$, y 2π–periódica.

(f) $y'' + y = \operatorname{sen}(t)$, y 2π–periódica.

17.- Se considera el siguiente sistema lineal

$$x' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(t) \\ -\operatorname{sen}(t) \\ \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}.$$

Aplicar el teorema de la alternativa de Fredhölm para demostrar que existen soluciones 2π–periódicas.

18.- Se considera la ecuación $x'' + a(t)x = 0$, donde $a \in C^1([0,\infty),\mathbb{R})$, $a(t) > 0$ y $a'(t) \geq 0\ \forall\, t \in [0,\infty)$. Si $x(t)$ es una solución y t_1, t_2 son dos ceros consecutivos de $x'(t)$, con $t_1, t_2 \in [0,\infty)$, entonces $|x(t_2)| \leq |x(t_1)|$ (sugerencia: multiplicar la ecuación por $2x'(t)$ e integrar) (Febrero 90)

19.- Estudiar el comportamiento asintótico de las siguientes ecuaciones:

(a) $y'' + \omega^2 y = 0$,

(b) $y'' - \omega^2 y = 0$,

(c) $y'' + 2cy' + \omega^2 y = 0$,

(d) $y'' - 2cy' + \omega^2 y = 0$,

discutiendo según los valores de $\omega > 0$ y $c > 0$.

20.- Discutir según el valor del parámetro $\gamma > 0$ la existencia de soluciones $\frac{2\pi}{\gamma}$–periódicas de la ecuación del oscilador armónico forzado $x'' + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen}(\gamma t)$ con $\omega > 0$. Calcular la solución de la ecuación con $x(0) = x'(0) = 0$ mediante la fórmula de variación de constantes y estudiar su comportamiento en infinito dependiendo del valor de γ.