ECUACIONES DIFERENCIALES
Curso 10–11

Relación de ejercicios 3: **La ecuación lineal II**

1.- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

(a) $x' = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 14 \\ 4 & 3 & -8 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \text{sen}(t) \end{pmatrix}$,

(b) $x' = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ -9 & -4 & -12 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(c) $x' = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$,

(d) $x' = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ 14 & -13 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix} x$.

Obtener además las soluciones de los PVI para (b) y (c) con condiciones iniciales

$$x(0) = (0,0,1)^T \ \text{ y } \ x(0) = (0,1)^T ,$$

respectivamente.

2.- Hallar una base del espacio vectorial de soluciones de $x' = A_i\, x$, $1 \leq i \leq 3$, en cada uno de los siguientes casos:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} , \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(Febrero 1992).

3.- Sea $A : I \to M_N(\mathbb{R})$ continua tal que $A(t)A(s) = A(s)A(t)$. Demostrar los siguientes enunciados:

(a) $A(t)$ y $\int_0^t A(s)\, ds$ conmutan.

(b) Si $A \in C^1(I)$ entonces A y A' conmutan.

(c) Si $A \in C^1(I)$ entonces

$$\frac{d}{dt} e^{A(t)} = A'(t) e^{A(t)} = e^{A(t)} A'(t) .$$

(d) Como consecuencia del apartado anterior, demostrar que si A y B conmutan entonces
$$e^{A+B} = e^A e^B \,.$$

(e) Si $A(t)$ y $\int_0^t A(s)\,ds$ conmutan, entonces $F(t) = e^{\int_0^t A(s)\,ds}$ es una matriz fundamental de $x' = A(t)x$. Calcular la matriz fundamental del sistema lineal homogéneo cuya matriz es
$$A(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t \\ -t & t^2 \end{pmatrix} .$$

4.- Se considera la ecuación diferencial lineal $x' = Ax$ con $A \in M_N(\mathbb{R})$. Demostrar que si Φ es una matriz solución de dicha ecuación, también lo es $\Phi^{(m)}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. ¿Se puede asegurar que si Φ es una matriz fundamental de la ecuación, entonces $\Phi^{(m)}$ también lo es? Dar un ejemplo que justifique la respuesta. Demostrar también que si A es una matriz nilpotente, entonces $\Phi^{(p)} = 0$ para cualquier p tal que $A^p = 0$ y, como consecuencia, todos los coeficientes de $\Phi(t)$ son polinomios.

5.- Sea $A \in M_N(\mathbb{R})$ y consideremos la ecuación diferencial matricial
$$X' = AX - XA \tag{1}$$
con la condición inicial $X(0) = X_0 \in M_N(\mathbb{R})$. Se pide:

(a) Demostrar que el PVI anterior tiene una única solución definida en $\mathbb{R}$.

(b) Demostrar que el PVI anterior es equivalente a la ecuación integral
$$X(t) = e^{At}X_0 - \int_0^t e^{A(t-s)}X(s)A\,ds\,,$$
donde $X : \mathbb{R} \to M_N(\mathbb{R})$ es continua.

(c) Se define la sucesión
$$X_{n+1}(t) = e^{At}X_0 - \int_0^t e^{A(t-s)}X_n(s)A\,ds$$
para $t \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$ y donde $X_0(t) = e^{At}X_0$. Demostrar que X_n converge a la solución del PVI y que la convergencia es uniforme sobre compactos.

(d) Se efectúa en la ecuación (1) el cambio de variable $X(t) = Y(t)e^{-At}$. Resolver la ecuación en Y y obtener como consecuencia una expresión explícita de la solución del PVI para la ecuación (1).

(e) Supongamos que los valores propios de A están en el eje imaginario y son simples. Demostrar entonces que todas las soluciones de (1) están acotadas en $(-\infty, \infty)$.

(Primer parcial 1994).

6.- Se considera el problema de valores iniciales
$$x' = tAx\,, \quad x(0) = x_0\,, \tag{2}$$
donde $A \in M_N(\mathbb{R})$ y $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

(a) Justificar que (2) tiene una única solución definida en $I\!R$.

(b) Construir la sucesión de iterantes de Picard asociada a (2).

(c) Utilizando el apartado anterior, encontrar la solución de (1) y expresarla en términos de la exponencial de una matriz.

(d) Probar que si todos los valores propios de A tienen parte real negativa, entonces todas las soluciones tienden a cero cuando $t \to \infty$.

(Diciembre 1993).

7.- Dada una matriz $A \in M_N(I\!R)$ se define su seno por medio de la serie

$$\mathrm{sen(A)} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} .$$

Probar que

(a) La serie dada es convergente y por tanto el seno de una matriz está bien definido.

(b) $\|\mathrm{sen(A)}\| \leq e^{\|A\|} \quad \forall\, A \in M_N(I\!R)\,.$

(c) La función $t \in I\!R \to$ sen $(tA) \in M_N(I\!R)$ es de clase C^2 y satisface la ecuación matricial $X'' + A^2 X = 0$.

(d) Calcular sen (tA) para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} .$$

(Junio 1989).

8.- Dada una matriz $A \in M_N(I\!R)$, ¿cómo deben definirse las funciones hiperbólicas $\mathrm{senh}(A)$ y $\cosh(A)$? ¿Se satisface la identidad $\cosh(A)^2 - \mathrm{senh}(A)^2 = I_N$?

9.- Se considera la ecuación diferencial lineal $x''' + 6x'' + 12x' + 8x = e^{-2t}$. Se pide:

(a) Construir un sistema equivalente.

(b) Determinar, para dicho sistema, una matriz fundamental principal en $t = 0$ y resolverlo. Hallar la solución particular que para $t_0 = 0$ vale $(1, 1, 1)^T$.

(c) A partir del apartado anterior, encontrar la solución de la ecuación diferencial de partida.

10.- Por el método de los coeficientes indeterminados, hallar una solución particular de

(a) $x'' - 3x' + 7x = 5te^{2t}$.

(b) $x'' + 4x = 5\mathrm{sen}(3t) + \cos(3t) + \mathrm{sen}(2t)$.

(c) $x'' - 2x' + 3x = t^3 + \mathrm{sen}(t)$.

11.- Por el método de variación de constantes, hallar una solución particular de

(a) $x'' + x = \text{cotan}(t)$.

(b) $x'' + 4x = \sec(2t)$.

(c) $x'' - 6x' + 9x = e^{3t}t^{-2}$.

(d) $x'' - x = e^{-t}\text{sen}(e^{-t}) + \cos(e^{-t})$.

12.- Previo rebajamiento del orden de las correspondientes ecuaciones diferenciales lineales, resolver

(a) $t^2x'' + t(t-4)x' + 2(3-t)x = 2t^4e^t$, con $x_1(t) = t^2$.

(b) $(t^2 - t)x''' + (3t - t^2 - 3)x'' - tx' + x = 0$, con $x_1(t) = \frac{1}{t}$ y $x_2(t) = t$.

(c) $tx'' - (2t+1)x' + (t+1)x = (t^2 + t - 1)e^{2t}$, con $x_1(t) = e^t$.

(d) $(1+t)x'' + (4t+5)x' + (4t+6)x = e^{-2t}$, con $x_1(t) = e^{at}$ y $a \in I\!R$ por determinar.

13.- Decidir de forma razonada si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

(a) Existe una ecuación del tipo $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ con $a, b \in C(I\!R)$ tal que $y(t) = t^5$ es solución (primer parcial 1989).

(b) Existe una matriz nilpotente $A \in M_N(I\!R)$ tal que e^A es también nilpotente (primer parcial 1989).

(c) Sean $\Phi(t)$ y $\Psi(t)$ matrices fundamentales de un mismo sistema lineal homogéneo. Entonces, $\Phi(t)\Psi(t)^{-1}$ es constante (Septiembre 1989).

(d) Sea $A \in M_N(I\!R)$. Si A es antisimétrica (respectivamente simétrica), entonces e^A es antisimétrica (respectivamente simétrica) (primer parcial 1991).

(e) Existe una solución no trivial de $x'' + \text{sen}(t)x' = 0$ que satisface $x(0) = x(\pi) = 0$ (primer parcial 1994).

(f) $\{e^t, \text{sen}(t)\}$ es un sistema fundamental de soluciones de una ecuación diferencial de la forma $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ con $a, b : I\!R \to I\!R$ continuas (Junio 1994).

(g) Sean f_1 y f_2 dos soluciones linealmente independientes de la ecuación $x'' + a_1x' + a_2x = 0$ con $a_1, a_2 \in I\!R$. Entonces el wronskiano $W(f_1, f_2)$ es constante si y sólo si $a_1 = 0$.

(h) Sea $A \in M_3(I\!R)$ con un valor propio α tal que $\dim(Ker[A - \alpha I]) = 3$. Entonces su forma canónica de Jordan es

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

(Septiembre 2003).

14.- Se considera la ecuación diferencial

$$x'' + x = 0\,. \tag{3}$$

Denotemos por $S(t)$ a la única solución de esta ecuación que satisface $S(0) = 0$ y $S'(0) = 1$ y por $C(t)$ a la única solución que satisface $C(0) = 1$ y $C'(0) = 0$. Probar las siguientes afirmaciones:

(a) Las soluciones $S(t)$ y $C(t)$ son infinitamente derivables y están definidas en $I\!R$.

(b) $S'(t) = C(t)$ y $C'(t) = -S(t)$ para todo $t \in I\!R$.

(c) $S(t)^2 + C(t)^2 = 1$ para todo $t \in I\!R$.

(d) El wronskiano de $S(t)$ y $C(t)$ vale -1.

(e) $S(t \pm a) = S(t)C(a) \pm C(t)S(a)$ para cualesquiera $t, a \in I\!R$.

(f) $C(t \pm a) = C(t)C(a) \mp S(t)S(a)$ para cualesquiera $t, a \in I\!R$.

(g) Existe $\alpha \in I\!R^+$ mínimo tal que $C(\alpha) = 0$. Llamaremos a ese número $\frac{\pi}{2}$.

(h) $S(t + 2\pi) = S(t)$ y $C(t + 2\pi) = C(t)$ para todo $t \in I\!R$.

15.- Sean

$$u(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma}\mathrm{sen}(t\sigma)}{\sqrt{\sigma}}\,d\sigma\,, \quad v(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma}\cos(t\sigma)}{\sqrt{\sigma}}\,d\sigma\,.$$

Demostrar que $(u, v)^T$ es solución de un sistema lineal homogéneo y resolver dicho sistema[1]. y v.

16.- Sea $\varphi \in C^1(I\!R, I\!R^N)$ solución del sistema $x' = Ax$ con $A \in M_N(I\!R)$. Demostrar que $t\varphi(t)$ es solución de $x' = Ax + \varphi(t)$ y aplicar este resultado para resolver

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

(Julio 2004).

[1]Recuérdese que $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$