ECUACIONES DIFERENCIALES
Curso 10–11

Relación de ejercicios 2: **La ecuación lineal I**

1.- Consideremos la ecuación diferencial

$$x' = F(t, x)\,, \tag{1}$$

donde $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una función continua que satisface:

(i) Para cualquier $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ existe una única solución $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ del PVI constituido por la ecuación diferencial (1) y la condición inicial $x(t_0) = x_0$.

(ii) El conjunto de todas las soluciones de la ecuación (1) definidas en $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial real.

Demostrar que (1) es una ecuación lineal homogénea.

2.- Consideremos el PVI

$$t^\sigma x' = A(t)x\,, \quad x(0) = x_0\,, \quad t \in (0, \infty)\,, \tag{2}$$

donde $\sigma \in (0, 1)$, $A : \mathbb{R} \to M_N(\mathbb{R})$ es continua y $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Por una solución de (2) entenderemos una función $x \in C([0, \infty), \mathbb{R}^N) \cap C^1((0, \infty), \mathbb{R}^N)$ que satisface la condición inicial y la ecuación diferencial en $(0, \infty)$.

(i) ¿Se puede aplicar el teorema de existencia y unicidad conocido para la ecuación diferencial lineal?

(ii) Probar que (2) es equivalente a encontrar una función $x \in C([0, \infty), \mathbb{R}^N)$ que satisfaga

$$x(t) = x_0 + \int_0^t s^{-\sigma} A(s)x(s)\, ds\ , \quad t \in (0, \infty)\,. \tag{3}$$

(iii) Definir la sucesión de iterantes de Picard asociada a (3) y probar que converge uniformemente en compactos de $[0, \infty)$ hacia una función $\rho(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R}^N)$.

(iv) Probar que $\rho(t)$ es solución de (3), justificando de modo riguroso el paso al límite en la integral.

(v) Demostrar que la solución de (2) es única.

(vi) Dar un ejemplo de PVI del tipo (2) para el que su solución no pertenezca a $C^1([0, \infty), \mathbb{R}^N)$.

(Febrero 90)

3.- Sea $\Phi : I \to M_N(\mathbb{R})$, $\Phi \in C^1(I)$. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que Φ sea matriz fundamental de un sistema del tipo $x' = A(t)x$, con $A : I \to M_N(\mathbb{R})$ continua, es

$$\det(\Phi(t)) \neq 0 \ \ \forall\, t \in I\,.$$

4.- Sea $\rho \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. Demostrar que ρ es solución de un sistema del tipo $x' = A(t)x$, con $A : \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R})$ continua, si y solamente si $\rho(t) = (0,0)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ o bien $\rho(t) \neq (0,0)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

5.- Se considera la matriz

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^{3t} & \frac{1}{t+1} \\ t+1 & 0 & e^{-3t} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Discutir los valores de t para los que Φ puede ser una matriz fundamental de una ecuación diferencial lineal homogénea. Hallar una matriz fundamental principal en cero.

6.- Se considera la matriz

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{t}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{t}\right) \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) ¿Para qué intervalos de $\mathbb{R}$ puede ser matriz fundamental de una ecuación diferencial lineal homogénea?

(ii) Construir dicha ecuación.

7.- Sean

$$f_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ e^t \end{pmatrix}, \quad f_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ \cos(t) \end{pmatrix},$$

dos soluciones de $x' = A(t)x$. Se pide:

(i) Encontrar $A(t)$ y determinar el conjunto I de valores de t para los que existe solución.

(ii) Dado $t_0 \in I$, hallar la matriz fundamental principal en t_0.

8.- Se considera el problema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1' &=& 2x_1 + x_2 + \cos(t) \\ x_2' &=& 3x_1 + 4x_2 + t \end{array} \right. , \quad x_1(0) = x_2(0) = 1\,.$$

Se pide:

(i) Comprobar que las funciones

$$f_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}, \quad f_2(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 3e^{5t} \end{pmatrix},$$

constituyen un sistema fundamental de soluciones.

(ii) Comprobar la fórmula de Jacobi–Liouville.

(iii) Encontrar la (única) solución que verifica las condiciones dadas.

9.- Sea $A : \mathbb{R} \to M_N(\mathbb{R})$ continua tal que existe $M > 0$ con

$$\|A(t)\| \leq M \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Sea $x(t)$ una solución de $x' = A(t)x$.

(i) Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, obtén la ecuación satisfecha por $y_\lambda(t) = e^{-\lambda t}x(t)$.

(ii) Demuestra que la función $\varphi(t) = \|y_\lambda(t)\|_2^2$ es derivable y que

$$-(M+\lambda)\,\varphi(t) \leq \frac{1}{2}\varphi'(t) \leq (M-\lambda)\,\varphi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(iii) Si $y_\lambda \neq 0$, deduce del apartado anterior la existencia de intervalos de valores de λ para los que el límite cuando $t \to \infty$ de $\|y_\lambda(t)\|_2$ es o bien 0 o bien ∞.

10.- Sea $A : I \to M_N(\mathbb{R})$ continua y consideremos las ecuaciones diferenciales matriciales siguientes:

$$Y' = A(t)\,Y\,, \tag{4}$$

$$Z' = -\,Z\,A(t) \tag{5}$$

y

$$W' = A(t)\,W - W\,A(t)\,, \tag{6}$$

donde I es un intervalo real.

(i) Demuestra que cada una de estas ecuaciones admite una única solución una vez prefijada una condición inicial en $t_0 \in I$.

(ii) Dadas Y y Z soluciones de (4) y (5), respectivamente, definidas en I y verificando que $Y(t_0)Z(t_0) = I_N$, demuestra que $W = YZ$ es solución de (6) y deduce que, para todo $t \in I$, se tiene que $YZ = I_N$.

(iii) Supongamos que para cada $t \in I$ la matriz $A(t)$ es antisimétrica ($A(t)^T = -A(t)$). Sea Y una solución de (4) definida en I que satisface que $Y(t_0)$ es una matriz ortogonal. Demuestra que entonces $Y(t)$ es ortogonal para todo $t \in I$.

11.- Discute razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(i) La matriz

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & \text{sen }(t) \\ \text{sen }(t) & 1 \end{pmatrix}$$

es matriz fundamental de un sistema lineal $x' = A(t)x$ con $A(t)$ continua y definida en $\mathbb{R}$ (Septiembre 03).

(ii) Se considera la ecuación

$$x'' - 2tx' + (t^2 - 1)x = 0\,. \tag{7}$$

El cambio de variable $x(t) = e^{\frac{t^2}{2}}u(t)$ reduce la ecuación (7) a una lineal de segundo orden con coeficientes constantes (Septiembre 03).

(iii) Las funciones

$$x(t) = \int_0^1 \text{sen }(t^2 + s^2)\, ds\,, \quad y(t) = \int_0^1 \cos(t^2 + s^2)\, ds$$

forman un sistema fundamental de soluciones de la ecuación $x'' + 4t^2 x = 0$ (Diciembre 02).